Uniwersytet Warszawski
Wydział Filozofii i Socjologii
Instytut Filozofii

Jacek Wolski
nr albumu: 229 193

Pojęcie formuły logicznej w I połowie XX wieku

Praca magisterska
na kierunku filozofia
w zakresie filozofii

Praca wykonana pod kierunkiem:
prof. dr hab. Mieczysław Omyła
Instytut Filozofii
Wydział Filozofii i Socjologii
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, wrzesień 2009

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przez mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis

Streszczenie

Praca przedstawia pojęcie formuły w logice pierwszej połowy XX wieku. Poprzez opis wyników badań G. Fregego, B. Russela i S. Leśniewskiego, zostaje ukazana złożona problematyka wiążąca się z formułą logiczną. Osią układu pracy, która wiąże prezentowane systemy logiczne, jest porównanie logiki Russella z logiką S. Leśniewskiego. Podstawowym kryterium tej komparacji jest stopień precyzji przy określaniu zasad rządzących formułą logiczną.

Słowa kluczowe

formuła logiczna, logika XX wieku, logika matematyczna, prototetyka, ontologia, Principia Mathematica, Begriffschrift, G. Frege, B. Russell, S. Leśniewski, teoria mnogości, mereologia

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

08100 filozofia

Klasyfikacja tematyczna

Tytuł pracy w języku angielskim

Notion of logical formula in first half of XXth century.

Spis treści

1. Wstęp

Historia filozofii może przedstawić pytania, które nurtowały kolejne pokolenia badaczy. Problemy takie były opisywane i kontemplowane od czasów antycznych. Wiele z nich nie nastręczało trudności, przez to szybko były rozwiązywane. Inne nie doczekały się prawidłowego rozstrzygnięcia aż do czasów współczesnych. W XX wieku pytania, które zajmowały najtęższe umysły poprzednich wieków, zostały ponownie opisane za pomocą narzędzi nowoczesnej logiki. Zanim do tego doszło, koniec XIX wieku i początek XX wieku w filozofii był zdominowany przez dyskusję nad teoriami logicznymi, ich cechami, możliwościami i kierunkami rozwoju.

Teorie, które wówczas były opracowywane i badane, miały jako jedną z wielu, wspólną cechę charakterystyczną. Twórcy odeszli od zapisu zdań czy wyrażeń w języku potocznym na rzecz symbolicznej notacji, która była zbliżona do koncepcji opracowywanej przez matematyków. Problem formuły logicznej, czyli odpowiedź na pytanie o możliwość uniknięcia wieloznaczności języka naturalnego i badania samej istoty zdań, stał się wówczas poważnym problemem dla ówczesnych badaczy.

Za pierwszego filozofa, który zajął się tym problemem, należy uważać Arystotelesa, który w genialny sposób starał się prowadzić badania przy pomocy utworzonej teorii sylogizmu. W okresie starożytnym na uwagę zasługuje też Chryzyp i szkoła stoików za wspólny wkład w rozwój logiki zdań. Nie sposób zaznaczyć też niedocenianego zwykle wpływu filozofów działających w Średniowieczu. Również następne epoki miały swoje wielkie postacie, które, często tylko na marginesie swojej pracy, badały problem formuły logicznej. Pośród tych filozofów należy podkreślić szczególną rolę i dokonania G. Leibniza. Jego idea języka uniwersalnego *charakteristica universalis*, który miała być pomocą w pracy badawczej, zainspirowała silnie na logików w pierwszej połowie XX wieku. Pomysł, aby pojęcia przedstawiać w ujednolicony sposób i operować nimi poprzez różne przekształcenia, został zrealizowany dopiero w dwudziestym wieku poprzez wysiłek wielu badaczy, logików i matematyków.

Na potrzeby tej pracy spośród wszystkich działających filozofów w omawianym okresie, w pierwszej połowie XX wieku, zostali wybrani trzej przedstawiciele. Pierwszy z nich, Gottlob Frege, jest opisywany przede wszystkim z powodu zapomnienia. Jego prace, choć obecnie nieznane szerszemu ogółowi, ale cenione i wspominane przez specjalistów, są kluczowe dla zrozumienia dominującego obecnie pojmowania problemu formuły logicznej. Wielką zasługą Fregego było wprowadzenie logiki na nowe tereny badawcze, które były konsekwencją bezpośredniego zastosowania rozwiązań matematycznych w obrębie badań filozoficznych. Ten filozof jest, jako jeden z pierwszych wielkich logików w XX wieku, doskonałym przykładem osoby pośredniczącej pomiędzy

światem filozofii, a nowoczesną logiką. Ważny przytoczenia jest także fakt, że autorzy *Prinicipia Mathematica* powołują się wielokrotnie na dokonania tego filozofa.

Wybór Bertranda Russella, jako kolejnego filozofa, jest oczywisty. Ten filozof zabłysnął w świecie nauki na początku stulecia poprzez wskazanie na antynomię w systemie opracowywanym przez G. Fregego. Następne dekady przyniosły wiele wartościowych prac z zakresu logiki lub filozofii polityki. Badacz ten położył także wielkie zasługi na rzecz popularyzacji problematyki filozoficznej, ale również przy omawianianiu współczesnych dokonań w nauce czy sztuce. Jednak na największą uwagę, także w niniejszej pracy, zasługuje epokowe dzieło, które napisał razem z Alfredem N. Whiteheadem. To monumentalne dokonanie logiki, ze szczególnym uwzględnieniem wyników G. Fregego i G. Peano, zostało zatytułowane *Principia Mathematica*. W tej pozycji, wydanej po raz pierwszy tuż przed I Wojną Światową, został zawarty system obejmujący podstawy logiki zdań, relacji, a także podstawy matematyki. Dokonania te zostały oparte na teorii mnogości, która była rozbudowywana przez czołowych filozofów tamtego okresu. Obecnie teoria mnogości została poważnie rozwinięta i stanowi podstawę teoretyczną dla wielu innych nauk między innymi matematyki.

Wydaje się, że system logiki zaproponowany przez A. Whiteheada i B. Russella wykazuje wiele cech wspólnych wobec teorii opracowywanych przez G. Fregego. Teza ta może być udowodniona poprzez wskazanie na podobieństwo w niektórych aspektach, przykładowo sposób definiowania i wykorzystywania funkcji, definicje spójników czy wreszcie wzajemne odniesienia do klasycznej teorii prawdy. Zatem dla potrzeb tej pracy teza o podobieństwie zostanie przyjęta jako prawdziwa, w jej silniejszej postaci tj. system *Principia Mathematica* i system G. Fregego są bardzo podobne, zatem obie logiki w gruncie rzeczy prezentują jeden z prądów. Kierunek ten w współczesnej logice jest dominujący i uznany wśród badaczy.

Jako trzeci z proponowanych filozofów został wybrany Stanisław Leśniewski. Głównym argumentem za wprowadzeniem tego filozofa jest argumentacja opisana w [Stonert, 1959]. W przedstawionej klasyfikacji systemów na podstawie ich syntaktyki, Stanisław Leśniewski zostaje umieszczony w innej kategorii niż G. Frege i B. Russell. [Stonert, 1959] dowodzi tego poprzez wyliczenie możliwych kategorii syntaktycznych. Z punktu widzenia autora, systemy Fregego i Russella-Whiteheada są zbliżone do siebie, dlatego też umieścił je w jednej grupie. Taka decyzja wskazuje na odmienne podejście do składni w logice. S. Leśniewski znany jest powszechnie z budowy teorii kategorii syntaktycznych, która została rozwinięta przez K. Ajdukiewicza. Przy tym [Stonert, 1964] dowodzi, że logika zdań i kwantyfikatorów, proponowana jako *prototetyka* i *ontologia*, zupełnie inaczej rozwiązuje problem formuły logicznej.

Kolejnym ważnym powodem jest fakt, że S. Leśniewski jest twórcą mereologii czyli teorii zbiorów kolektywnych, która była konkurencyjna wobec teorii mnogości proponowanej przez G. Cantora, a przejętej i rozwiniętej przez B. Russella czyli taką, która operuje definicją zbioru dystrybutywnego. Także [Woleński, 1983] stwierdza, że system tego filozofa był bardziej intuicyjny i prostszy niż system teoriomnogościowy. Niemniej pomimo sławy, jaka

była udziałem S. Leśniewskiego w okresie dwudziestolecia międzywojennego, jego przedwczesna śmierć i zniszczenie nieopublikowanych badań na skutek działań wojennych spowodowało, że został zapomniany. Grupa studentów, którzy byli jego słuchaczami, wyemigrowała po wojnie i podjęła działalność na rozmaitych zagranicznych uniwersytetach. Nie mogli oni należycie rozpowszechnić dokonań tego logika, przede wszystkim ze względu na prowadzenie pracy naukowej na całej kuli ziemskiej, przykładowo Jan Srzednicki był profesorem na Uniwersytecie w Melbourne, podczas gdy Alfred Tarski działał na Uniwersytecie w Berkeley. Brak działającej grupy uczniów i straty wojenne spowodowały , że prace tego filozofa nie zostały właściwie rozpowszechnione.

Tematem niniejszej pracy jest zagadnienie formuły logicznej. W ogólnym zarysie problem formuły logicznej to pytanie, w jaki sposób przetłumaczyć zdania wyrażone w języku potocznym na wyrażenia w języku symbolicznym za pomocą symboli oznaczających nazwy, zdania czy funktory. Dla badacza, który próbuje odpowiedzieć na takie pytanie, ważne jest przedstawienie i uzasadnienie poprawnego sposobu symbolizacji zdań języka potocznego. Celem takiego działania jest uzyskanie zapisu wyrażenia poprzez zestaw na wstępie zdefiniowanych znaków. Częścią problemu formuły logicznej jest także sprawa prowadzenia niezawodnych wnioskowań czyli przechodzenia od zdań prawdziwych, przesłanek, do innych zdań prawdziwych na mocy przyjętej metody dowodzenia, nazywanych wnioskami.

Oba systemy, Russella–Whiteheada–Fregego i Leśniewskiego mają roszczenia do bycia całkowitym i jedynym systemem. Porównanie obu systemów w sposób odpowiedzialny byłoby wspaniałym osiągnięciem naukowym. W tej pracy zestawienie obu logik zostanie ograniczone tylko do zakresu formuły logicznej. Tak złożone systemy można porównywać na wielu polach i za pomocą wielu kryteriów. Podstawowym przyjętym sprawdzianem jest poziom precyzji przy opisywaniu formuły logicznej. Dlatego też teza niniejszej pracy brzmi:

Charakterystyka formuły logicznej w systemie logiki S. Leśniewskiego jest precyzjniejsza niż analogiczna charakterystyka w logice Frege-Russella

Teza ta zostanie uzasadniona przez przedstawienie koncepcji formuły logicznej w filozofii G. Fregego i B. Russella. Następnie zostaną zaprezentowane poglądy S. Leśniewskiego. Po zarysowaniu najważniejszych punktów obu podejść do tematu formuły, zostaną ukazane wady i zalety każdego z systemów w zakresie składni. Przy tym dowiedzione zostanie, że system Leśniewskiego w aspekcie syntaktycznym, a także na innych polach, jest bardziej ścisły i pedantyczny niż porównywana logika B. Russella.

Dla celów poprawnego porównania obu systemów zostanie zachowany podobny plan przedstawiania obu teorii. Poszczególne trzy rozdziały, odpowiednio na temat poglądów Fregego, Russella i Leśniewskiego, będą miały wspólną strukturę. W ten sposób zostanie umożliwione, ale również ułatwione późniejsze porównanie wyników. Przy tym odpowiednio przebiegnie ekspozycja problemu formuły logicznej. W każdej części będzie możliwe wskazanie, w dodatkowo wyróżnionych podrozdziałach, niżej zarysowanych części:

— język formalny — w tej części, w miarę możliwości zostanie przedstawiony język formalny zaproponowany przez badanego filozofa. Zawarte

w tym miejscu zostaną informacje na temat składni, przyjętych aksjomatów, sposobów dedukcji, a także notacja proponowana przez danego filozofa.
— symbolizacja — w tej części przedstawione będą wyniki dotyczące tłumaczenia zdań języka naturalnego na sztuczny język formalny. Zostaną w tym miejscu również zaproponowane algorytmy przekształcania w formułę logiczną. Przedstawiona będzie też definicja formuły logicznej.
— problemy — część będzie poświęcona problemom związanym z przyjętą definicją formuły. Tu zostaną zamieszczone uwagi na temat ograniczenia w zakresie odwzorowania. Zostanie poruszony problem konsekwencji lub zobowiązań ontologicznych – jawnych i ukrytych.

Na końcu należy wspomnieć o notacji wykorzystywanej w niniejszej pracy. Powszechnie wiadome jest, że każdy z trzech badanych filozofów jest twórcą własnej notacji. Obecnie zapis symboliczny, pomimo podobieństw, nadal jest nieuporządkowany, choć trwają starania o jednoznaczną symbolikę podstawowych funktorów czy oznaczeń stałych. W [Frege, 1879] została zaproponowana notacja oparta na rysunkach oznaczających podstawowe operacje logiczne. Natomiast [Marciszewski, 1987] korzysta z notacji Peano-Russella przy omawianiu filozofii Leśniewskiego. Motywuje to faktem, że ta notacja jest najszerzej znana w środowisku naukowym. Dlatego też przy przedstawianiu dokonań omawianych filozofów, dla uzyskania jasności wykładu, ich tezy będą tłumaczone na współczesną notację, zgodnie z poniższą tabelą oznaczeń:

$\forall$	– znak kwantyfikatora ogólnego
$\exists$	– znak kwantyfikator szczegółowego
$\sim$	– znak negacji
$\rightarrow$	– znak implikacji
$\wedge$	– znak koniunkcji
$\vee$	– znak alternatywy
$\equiv$	– znak równoważności

W miarę możliwości w przypisach zostaną przytoczone oryginalne wyrażenia z cytowanych pozycji w celu weryfikacji poprawności przełożenia przez Czytelnika. Nie zawsze jednak będzie to możliwe. Graficzna notacja Fregego zmusza do tłumaczenia formuł zapisanych w formie kresek na formę symboli. Przy tym nie jest możliwe zapisanie wersji oryginalnej.

Należy podkreślić, że dzięki translacji na współczesną notację zostanie uzyskany wspólny język dla wszystkich trzech filozofów. Dodatkowo sprowadzanie zdań z różnych notacji do jednej wspólnej pozwoli na wykazanie rozumienia poruszanych tematów i ograniczy ewentualne interpretację.

W kolejnych rozdziałach będą omówieni filozofowie w porządku chronologicznym. Najpierw opisany zostanie G. Frege, następnie B. Russell, ze szczególnym uwzględnieniem *Principia Mathematica*. Na końcu przedstawiona zostanie sylwetka i wyniki badań S. Leśniewskiego. Ten najprostszy z możliwych układ pozwoli na wyeksponowanie najważniejszych myśli omawianych logików.

2. Język pojęć Gottloba Fregego

Przedstawiając poglądy Gottloba Fregego, należy ciągle mieć na uwadze trzy fakty, których zrozumienie pomaga wyjaśnić przyjęty w tej pracy sposób prezentowania jego poglądów. Po pierwsze, Frege był jednym z pierwszych badaczy, który wykorzystał wyniki matematyki na polu filozofii poprzez wprowadzenie ich do logiki. Stąd jego pisma, choć stanowią przełom, są poświęcone częściej ontologii, i semantyce, niż logice. Wydaje się również, że spośród zagadnień, które nie dotyczą filozofii, czyli naukowych pozafiloficznych, że pytania o podstawy matematyki są znacznie ważniejsze dla Fregego niż dysputy metafizyczne.

Po drugie, Frege napisał trzy książki i wydał kilkanaście artykułów. Z punktu widzenia naukowego światopoglądu książki są ważniejsze niż artykuły. Książki pozwalają na przedstawienie całościowego ujęcia, ponieważ autor może szerzej i lepiej wyjaśnić swoje stanowisko. Artykuły wykorzystane są natomiast przez autorów jako sposób na uzupełnienie treści zawartych w opublikowanych książkach lub jako miejsce polemiki z innymi filozofami. Twórczość Fregego wymyka się jednak powyższym uwagom. O ile tematy związane z matematyką są opisane ciekawie w książkach o wiele mówiących tytułach, przykładowo *Język pojęć, formalny język jasnego myślenia na przykładzie arytmetyki*[1] czy też *Podstawy arytmetyki. Badania logiczno-matematyczne pojęcia liczby*[2], o tyle tematy ściśle filozoficzne były poruszane raczej w artykułach. Najważniejsze artykuły były publikowane w różnych niemieckojęzycznych czasopismach przez ponad dwadzieścia lat, od praktycznie ostatnich dekad końca XIX wieku do końca pierwszej wojny światowej. Przy założeniu naturalnego rozwoju intelektualnego każdego filozofa, poglądy mogły się zmieniać w trakcie badań. Dowodzi tego, chociażby w przypadku Fregego, wprowadzenie rozróżnienia między sensem a znaczeniem w [Frege, 1892b], które zostało ogłoszone dopiero 1892 roku, znacznie później niż dwie wyżej wymienione pozycje książkowe wydane blisko 10 lat wcześniej. Zatem proste przedstawienie poglądów, nawet przy ograniczeniu się tylko do zagadnienia formuły logicznej, może natknąć się na problemy z poprawną, zgodną z zamierzeniami, interpretacją poglądów autora.

Po trzecie, współcześnie Gottlob Frege nie jest popularny w porównaniu z innymi postaciami działającymi w pierwszej połowie XX wieku. Jest wspominany na zajęciach z historii filozofii współczesnej jako postać, która dokonała rewolucji w sposobie uprawiania i postrzegania logiki. Jednak trzeba pamiętać, że opublikowanie antynomii Russella na gruncie koncepcji Fregego

---

[1] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, por. [Frege, 1879]

[2] *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, por. [Frege, 1884]

spowodowało między innymi to, że modna stała się logika w wydaniu anglosaskim. Dodatkowo notacja graficzna, pomimo swoich niezaprzeczalnych zalet, takich jak pominięcie narodowych znaków i symboli, nie upowszechniła się. Środowiska logików, po okresie wprowadzania własnych oznaczeń na oznaczane działania, przyjęły w miarę podobną notację, która podobna była do tej wprowadzonej na użytek dzieła *Principia Mathematica*. Jednocześnie należy zauważyć, że do dnia dzisiejszego na język polski nie przetłumaczono podstawowego kanonu dzieł tego filozofa, oprócz wyboru artykułów. Wydaje się, że stało się tak prawdopodobnie dlatego, iż tematyka poruszana przez Fregego znalazła swoje rozwiązanie w pracach współczesnych mu logików i dlatego przestała być interesująca.

Zatem należy pamiętać o powyższych uwagach, ponieważ stanowią dodatkowe wyjaśnienie przyjętej interpretacji i ewentualnych niejasności, które mogą się pojawić. Winno się podkreślić, że, pomimo przedstawionych krytycznych uwag, Frege pozostaje interesujący ze względu fakt stanowienia ogniwa łączącego dokonania filozofii XIX wieku, a współczesną logiką zbudowaną wysiłkiem badaczy w XX wieku.

2.1. Język formalny

2.1.1. Begriffschrift - pismo pojęć

Opis konstrukcji Gottloba Fregego należy zacząć od niewielkiej, zaledwie kilkudziesięciostronicowej książeczki, która została wydana w 1879 roku pod tytułem „*Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*". W [Frege, 1879] zostaje położony fundament pod przyszłe osiągnięcia logiki XX wieku. Zarysowana koncepcja pokazuje kierunek w jakim w przyszłości będzie się poruszała zdecydowana większość logików. Propozycja ta cechuje się niezwykłą prostotą. Frege pragnie uzbroić badacza w filozoficzny odpowiednik mikroskopu. Według autora, zwykły język, język naturalny, może być porównany do oka. Oko jest wspaniałym narzędziem, które pozwala na odpowiednie użycie w różnorodnych warunkach. Jest znacznie lepsze niż mikroskop. Jednak, gdy potrzebne jest zbliżenie, dostrzeżenie szczegółów koniecznych w pracy analitycznej, oko nie jest w stanie zapewnić prawidłowego obrazu. Natomiast mikroskop, pomimo wielu niedoskonałości, może zapewnić wymaganą dokładność i szczegółowość. [Frege, 1879] jest takim *filozoficznym* mikroskopem.

Najważniejszą cechą zaproponowanego języka jest jego graficzna notacja. Z teoretycznego punktu widzenia, jest to prostsza forma do analizy, ponieważ złożone dowody stają się znacznie bardziej przejrzyste. Dowody, zamiast symbolicznych formuł, stają się obrazami. Dalej, symbolizacji podlegają całe badane zdania. W ten sposób zawieszone zostaje znaczenie badanych zdań. Znacznie ważniejsze stają się relacje pomiędzy zdaniami, zarówno tymi fałszywymi jak i prawdziwymi. Zamiast analizy konkretnego zdania, przykładowo „*Przeciwne pola magnetyczne przyciągają się wzajemnie*", zostaje wprowadzone oznaczenie sądu tj. poprzez literę A. Zamiast wprowa-

dzać złożony system znaków, które oznaczałyby odpowiednio stwierdzanie, czy negację sądu, Frege proponuje zapis ideograficzny. Pomysł ten musiał się powstać przy rozważaniu dotychczasowej literatury. W tym okresie znane były różne notacje, przykładowo wprowadzona przez Boole'a. Każdy badacz, wprowadzając nową operację matematyczną, definiował ją przy pomocy samodzielnie wybranego symbolu. Jest oczywiste, że różne szkoły miały własne, często odmienne, symboliki w tych samych dziedzinach i przy tych samych zagadnieniach.

Zatem G. Frege wprowadza ideogramy zamiast specjalnych znaków alfanumerycznych. Znaki te wskazują na najważniejsze cechy każdego połączenia zdania. Nie są może intuicyjne, natomiast są rewolucyjnym rozwiązaniem problemu notacji.

— $-$ — pozioma kreska postawiona przed symbolem zdania oznacza treść tego zdania.

— $\vdash$ — taka kombinacja oznaczała, że dane wyrażenie jest twierdzeniem.

— $\begin{array}{l} \top q \\ \llcorner p \end{array}$ — w ten sposób oznaczana jest implikacja $p \to q$.

— $\begin{array}{l} \top q \\ \llcorner_{\top} p \end{array}$ — natomiast konstrukcja ta jest równoznaczna z $\sim p \to q$

Niektóre ideogramy zostały później wykorzystane. Kombinacja poziomych i pionowych kresek została wykorzystana przez B. Russella w postaci $\vdash$ jako znak stwierdzania. Inne kombinacje kresek pozwala na definicję negacji i zależności wynikania. Mając dwie podstawowe operacje implikacji i negacji można określić inne możliwe operacje takie jak alternatywa czy ekwiwalencja.

Pozycja [Frege, 1879] została dokładnie omówiona w latach czterdziestych w [Korcik, 1948] na łamach pisma Towarzystwa Filozoficznego Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego. Autor, w tej pracy, bada recepcję pracy Fregego, cytuje także polemiki tego filozofa z innymi badaczami na temat przydatności i interpretacji propozycji ideograficznej notacji.

W przedstawianej pozycji [Frege, 1879], Frege posługuje się tylko dwiema regułami wnioskowania. Pierwsza z nich to reguła podstawiana, która nigdzie nie jest jednak wyraźnie sformułowana. Druga z nich zaś to powszechnie wówczas, i obecnie, znana reguła *modus ponendo ponens*. Obecnie jest ona zapisywana często w postaci zasady wnioskowania tj.

$$\frac{A \to B, A}{B}$$

Przy pomocy tych dwóch zasad, autor buduje swój gmach systemu logiki.

2.1.2. Analiza zdania

Gottlob Frege wykorzystuje idee, które były powszechne w matematyce, do tłumaczenia zdań języka naturalnego na wprowadzany język pojęć[3]. W matematyce rozróżniano litery, które reprezentowały pewne liczby bądź funkcje, przykładowo

$$a + b = c.$$

[3] dosł. Begriffschrift

Były to elementy zmienne, które mogły się zmieniać w trakcie operacji podstawiania. Jednocześnie wprowadzano znaki tzw. stałe, takie jak *0*, *1*, -, + czy =, które miały szczegółowe znaczenie i łączyły zmienne. Jest to rozróżnienie pomiędzy elementami ogólnymi, które mogą posiadać wiele znaczeń, a elementami szczegółowymi, które są jasno i ściśle zdefiniowane. G. Frege dzieli wszystkie znaki, które są używane w danym badanym języku: na takie poprzez które można rozumieć obiekty pewnego rodzaju i na takie, które mają całkowicie określone znaczenie.

Zatem [Frege, 1879] zdania oznajmujące, przykładowo *Przeciwne pola magnetyczne przyciągają się*, czy *Grecy zwyciężyli Persów pod Plateami* są tłumaczone, lub lepiej, zamieniane na wielkie litery alfabetu greckiego. Każda litera oznacza jedno zdanie oznajmujące. Frege początkowo nie zajmuje się zdaniami pytającymi, czy rozkazującymi. Należy zaznaczyć, że ta tendencja jest podtrzymana w późniejszych artykułach, które referowały inne badania.

Gottlob Frege nie akceptuje rozróżnienia pomiędzy podmiotem a orzeczeniem, choć należy tu zaznaczyć, że klasyczne zdania sylogistyki mogą być przedstawione ideograficznie. Ta klasyczna dystynkcja *podmiot-przedmiot*, która została wprowadzona przez Arystotelesa, opisuje zależność pomiędzy dwoma nazwami, które oznaczają pewne przedmioty. Te przedmioty są połączone w zdaniu zwykle łącznikiem *jest*. W każdym zdaniu oznajmującym można wskazać podmiot i jego określenie. Przykładowo, w zdaniu *Pegaz leci* można wskazać podmiot *Pegaz* i orzeczenie, czy też predykat, — *leci*. Frege pomija taką konstrukcję. Stwierdza, że bardzo często w zdaniu, szczególnie w celu zaakcentowania lub podkreślenia ważnej informacji dla słuchacza, podmiot występuje w miejscu szczególnym, odmiennym od klasycznej konstrukcji, gdzie podmiot musi być na pierwszej pozycji. Takie zdanie, o treści przeznaczonej dla określonego słuchacza, nijak mają się do zasad gramatyki.

Dwa zdania mogą zawierać taką samą treść, pomimo odmiennej budowy. Przykładowo, zdanie *Grecy pokonali Persów pod Plateami* i *Persowie zostali pokonani przez Greków pod Plateami* mówią o tym samym czyli opisują zwycięstwo jednego narodu nad drugim w pewnym określonym historycznie miejscu w pewnej określonej bitwie. Przy tym w pierwszym zdaniu podmiotem są Grecy, natomiast w drugim podmiotem są Persowie. Sama treść, zawartość tych zdań nie zmienia się pomimo różnicy pomiędzy podmiotami czy konstrukcji gramatycznej. Dlatego Frege bada zdania oznajmujące raczej pod kątem możliwości ich zastąpienia w ciągu dedukcyjnym, niż pod kątem wymienialności czy zastępowalności w dyskusji lub rozmowie. Proponuje zatem odmienne kryterium porównywania od dotychczas przyjmowanych. Podobieństwo zdań ma polegać na wykazaniu, że zdania mogą być wymienione w ciągu dedukcyjnym, przykładowo dowodzie składającym się z przesłanek i wniosków. Taka zamiana pomiędzy dwoma zdaniami o tej samej treści, lecz o różnej formie, pozwala wyciągnąć wniosek, że konsekwencje wyciągnięte, zarówno z jednego, jak i z drugiego zdania, winny być takie same, choć występuje wyraźna różnica w formie. Dzieje się tak z powodu tej samej treści zdań, która jest tylko zapisana na różne sposoby.

W ten sposób Frege może zapisywać zdania w formie graficznej, jako pewne „cegiełki" podstawowe rachunku zdań. Zdania są przedstawiane w formie wielkich pierwszych liter alfabetu greckiego. Każda litera oznacza pewną

zawartość zdania, jego treść czy, lepiej, zapis pewnej zależności pomiędzy pewnymi pojęciami. Kombinacja kresek, która wskazuje na własność bycia sądem, a która jest częścią istoty zdania, może zostać przetłumaczona jako *jest faktem*, zatem jako dodatkowy predykat określający przynależność zdania do zbioru sądów. Zatem zdanie *Archimedes zginął w trakcie zdobywania Syrakuz* może i powinno zostać przetłumaczone na ,*Brutalna śmierć Archimedesa w trakcie zdobywania Syrakuz jest faktem.* A taka postać może być zapisana jako *A jest faktem*, oczywiście w formie graficznej.

Ostatnia kombinacja kresek, o której należy wspomnieć, dotyczy kwantyfikacji zdania. Frege wprowadza kwantyfikator ogólny dla zdań, które są funkcją dla pewnych przedmiotów. W ten sposób może rozszerzyć swój rachunek zdań o logikę nazw. Zagadnieniu nazw poświęcił w późniejszym okresie kilka artykułów, przykładowo w [Frege, 1892b], analizuje zależność pomiędzy sensem a znaczeniem nazwy.

2.1.3. Rachunek zdań

[Korcik, 1948] stwierdza, że Frege podaje w swoim traktacie 133 twierdzenia. Spośród nich pierwsze 68 należą do logiki zdań i tworzy system zbudowany na dziewięciu aksjomatach, które są znane obecnie jako prawa logiki. Pozostałe zdania dotyczą ogólnej teorii ciągów. Poniżej zostały wypisane tezy naczelne za pomocą współczesnej notacji:

1. $a \rightarrow (b \rightarrow a)$ — prawo poprzednika
2. $\Big(c \rightarrow (b \rightarrow a)\Big) \rightarrow \Big((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)\Big)$ — prawo Fregego
3. $\Big(d \rightarrow (b \rightarrow a)\Big) \rightarrow \Big((b \rightarrow (d \rightarrow a)\Big)$ — prawo komutacji
4. $(b \rightarrow a) \rightarrow (\sim a \rightarrow \sim b)$ — prawo transpozycji
5. $\sim\sim a \rightarrow a$ — I prawo podwójnej negacji
6. $a \rightarrow \sim\sim a$ — II prawo podwójnej negacji
7. $(c \equiv d) \rightarrow f(c) \rightarrow f(d)\, a$
8. $c \equiv c$
9. $\forall a \Big(f(a) \rightarrow f(c)\Big)$

Podsumowując, [Frege, 1879] zawiera pewną propozycję notacji ideograficznej, opartej na zastąpieniu symboli kombinacjami kresek pionowych i poziomych. Na tej podstawie, za pomocą dwóch wyrażeń czyli negacji i implikacji, zostaje zbudowany system logiki zdań, w którym poszczególne zdania wynikają na podstawie wcześniej założonych reguł z ściśle określonej liczby dziewięciu aksjomatów. Jak wspomina [Korcik, 1948], znaczenie historyczne polega głównie na tym, że zapoczątkował nowy okres w historii logiki. Dla Fregego logika zdań miała pierwszeństwo wobec logiki nazw, co było niezgodne z przyjmowaną interpretacją. Zgodnie z nią, za Arystotelesem, ważniejsza była sylogistyka czyli logika nazw, czy lepiej logika klas.

Dla historyka filozofii, który zajmuje się tamtym okresem jest jasne, że Gottlob Frege skonstruował po raz pierwszy nowoczesną dwuwartościową logikę zdań, przy czym przedstawił ją w postaci aksjomatycznej. W ten sposób

zostały wskazane pewniki teorii, sposób wnioskowania, a także twierdzenia. Zatem był to pierwszy system współczesnej teorii dedukcji.

2.1.4. Funkcja

G. Frege zaproponował jako jeden z pierwszych funkcję jako podstawowy składnik każdego zdania. Za pomocą pojęć, które dotychczas były wykorzystywane w matematyce, zostaje określony całkowicie nowy sposób posługiwania się powszechnie znanymi słowami. Pojęcie funkcji zostaje przeniesione z terenu matematyki w przestrzeń filozofii. Badacz wykorzystuje to nieco inaczej zdefiniowane pojęcie do analizy zdań.

Tu trzeba zaznaczyć, że funkcja jako pewne, jedno z wielu, pojęć matematyki nie była wówczas tak jasno przedstawiana jak obecnie. W poprzednich wiekach przez funkcję rozumiano formułę matematyczną zawierającą zmienną x, czyli jako wzór z jedną niewiadomą. Zatem $x^2 + 3$ było wówczas funkcją od zmiennej x, natomiast $2^2 + 3$ było funkcją dla argumentu „2". Tak proste rozumienie funkcji było przydatne w pracy naukowej o tyle, o ile wskazywało pewną właściwość wyrażenia tj. jego ogólność. Jednak nie było możliwe wykorzystanie wszystkich perspektyw proponowanego narzędzia, ponieważ było zbyt niedookreślone i zbyt niejasne. Nie było całkowicie sprecyzowane. Przykładowo nie było wiadome, co badacz ma na myśli, gdy zapisuje czyli gdy przedstawia w takiej postaci wyrażenia matematyczne.

Wykorzystanie funkcji przy opisie zdania oznajmującego oznacza początek analizy budowy zdania w całkowicie odmienny sposób. Zdanie przestaje być przedstawiane jako pewna, określona i zamknięta całość. Frege, używając funkcji, pomija klasyczne rozumienie konstrukcji zdania jako połączenie podmiotu i orzeczenia. W ten prosty i genialny sposób zdania mogą być zapisywane w notacji graficznej z pominięciem rozróżnienia podmiot–orzeczenie. Zatem pominięta zostaje ewentualna różnica w formie, przykładowo, użycie strony biernej w badanym zdaniu. Pozostaje to, co jest istotą zdania czyli wskazanie właściwej treści zdania, która jest pewną zależnością między pojęciami występującymi w badanym zdaniu.

Frege opisuje strukturę zdania w kategoriach matematycznych. Z punktu widzenia historii filozofii, takie potraktowanie formy zdania jest całkowicie nowe i inspirujące. W paragrafie 9 w [Frege, 1879], autor zastanawia się nad prostym zdaniem *wodór jest lżejszy od dwutlenku węgla*. Oczywiste dla tego badacza, który był wykształconym matematykiem, jest to, że w badanym zdaniu pewne części są niezmienne. Autor stwierdza, że można zastąpić nazwę *wodór* przez, przykładowo, *tlen* lub *azot*. Pomimo zamiany, podstawienia innego pojęcia, zachowana pozostaje relacja opisana badanym zdaniem czyli relacja *jest lżejszy niż dwutlenek węgla*. Na tej podstawie Frege proponuje odmienny zapis konstrukcji zdania oznajmującego. W wyrażeniu należy wyróżnić stałą część, która jest niezmienna dla wielu podobnych wyrażeń. Ponadto należy wskazać zmienną część wyrażenia, która daje możliwość podstawienia innych podobnych zmiennych części, a przez to umożliwia otrzymanie innych, nowych wyrażeń o całkowicie odmiennej wartości logicznej.

Zatem badane wyrażenie *wodór jest lżejszy od dwutlenku węgla* może zostać rozłożone na stałą część, w tym przypadku *jest lżejszy niż dwutle-*

nek węgla. Stała część reprezentuje relację pomiędzy dwoma gazami, relację znaną z potocznego doświadczenia tj. *bycia lżejszym niż*. Zmienna część to w badanym wyrażeniu słowo *wodór*. Jest to w tym przypadku pewien znak, który może być wymieniony przez inne, jemu podobne, ale także odmienne, przykładowo *książka*. Znak ten denotuje pewien przedmiot. Może być wymieniony przez inne wyrażenie z zachowaniem sensowności wyrażenia. Frege w tym miejscu powtarza terminologię matematyczną, co oznacza, że pierwszy składnik jest nazywany funkcją, drugi zaś argumentem.

W badanym przypadku, *wodór* może być zastąpiony przez inny pierwiastek, przykładowo *tlen*. Zamiana wyrażeń nie zmienia wartości logicznej badanego zdania. Frege nie wyklucza możliwości podstawienia znaku, przykładowo *cztery*, które spowoduje, że zdanie przestanie być sensowne. Podobnie Frege nie wyklucza możliwości podstawienia takiego zwrotu, który wobec badanej relacji zmieni stan logiczny wyrażenia. Wydaje się, że zostało milcząco założone, że żaden czytelnik nie będzie miał wątpliwości dotyczące podstawianych znaków. Frege nie porusza tematu kryterium sensowności wyrażeń, czy potencjalnych kłopotów z translacją zdania na język pojęć.

W [Frege, 1879] zostaje zaproponowana definicja funkcji, która brzmi następująco:

> *Jeśli w wyrażeniu, którego zawartość nie musi posiadać możliwości bycia sądem, prosty lub złożony znak ma jedno lub więcej wystąpienie, i jeśli zakładamy, że ten znak może być wymieniony w jednym bądź wszystkich wystąpieniach na coś innego (ale wszędzie przez tę samą rzecz), wtedy część niezmienna nazywa się funkcją, a część wymienna - argumentem funkcji*[4].

Ta prosta definicja, przedstawiona powyżej, nasuwa wiele wątpliwości związanych z rozumieniem funkcji i sposobem symbolizacji zdania. Interpretacja zdania jako funkcji z argumentami nie zawsze jest jednoznaczna. W zależności od potrzeb w prostym zdaniu, przykładowo *Brutus zabił Cezara*, można wyróżnić aż trzy funkcje. Jeśli zostanie przyjęte, że argumentem w ;1zdaniu ma być *Brutus*, to funkcją jest *zabił Cezara*. Jest to najprostsza translacja takiego zdania. Jeśli przyjmiemy, że *Cezar* jest elementem wymiennym, to elementem stałym czyli funkcją w zdaniu jest *został zabity przez Brutusa*. Oczywiście zdanie *Cezar został zabity przez Brutusa* ma taką samą treść jak *Brutus zabił Cezara*. Różnicą jest wyróżnienie jako podmiotu postaci Cezara, co jest pomijane przy zamianie na funkcję. W ostatniej trzeciej możliwości funkcja może zostać określona jako prosta, dwuargumentowa relacja *zabił*. W takim przypadku argumentami tej funkcji, czy obecnie raczej należałoby powiedzieć się relacji, stają się odpowiednio *Brutus* i *Cezar*. Problem naszkicowany powyżej, dokładnie wątpliwości dotyczące jednoznaczności przekładu, nie został podjęty przez autora. Wydaje się, że specjalnie został pominięty, aby nie wprowadzać trudności na początku przedstawiania języka

[4] *If in an expression, whose content need not be capable of becoming judgment, a simple or a compound sign has one or more occurrences and if we regard that sign as replaceable in all or some of these occurrences by something else (but everywhere by the same thing), then we call the part that remains invariant in the expression a function, and the replaceable part the argument of the function.*

pojęć. Jest to zrozumiałe, dla Fregego ważniejsze było przedstawienie notacji graficznej i jej zalet niż analizowanie problemu poprawnej symbolizacji zdań, czy, inaczej, poprawnej translacji zdań języka naturalnego na język pojęć notacji graficznej.

Wykorzystanie pojęcia funkcji, wedle mojej oceny, stanowi ważny wkład w filozofii G. Fregego w nowoczesną logikę. Co prawda, w trakcie przedstawiania języka notacji graficznej autor nie wspomina zbyt wiele o funkcjach, ale wykorzystuje je jako część rachunku zdań. Później analizuje w kilku artykułach zależności pomiędzy funkcjami a innymi częściami systemu logicznego. Wprowadzona kategoria została głębiej zaanalizowana w [Frege, 1891].

W trakcie opisywania niedostatków, współczesnej autorowi, arytmetyki stwierdza, że funkcja jest czymś niekompletnym, tworem, które wymaga uzupełnienia przez argument. Argument jest czymś zamkniętym i stałym, w przeciwieństwie do funkcji. Przykładowa konstrukcja winna wyglądać następująco:

$$y = f(x),$$

gdzie f oznacza funkcję jednoargumentową, x jest dopełniającym argumentem, natomiast y jest wartością funkcji od danego argumentu. Wyżej przedstawiona formuła została zapisana współcześnie przyjętą notacją z uwzględnieniem znaku równości czy systemu zaznaczania ważności przez nawiasy. Frege zapisuje swoje uwagi w bardziej archaicznym stylu, zgodnym z osiągnięciami nauki końca XIX wieku.

Funkcja może być określona tylko dla jednego argumentu. Jednak jeśli badana funkcja może być wyliczana dla wielu argumentów, to zbiór wartości Frege nazywa *przebiegiem funkcji*[5]. Obecnie mówi się o wartościach funkcji, które identycznie opisują zbiór wyników opracowanych dla pewnego zakresu argumentów. Wprowadzone pojęcie przebiegu funkcji jest kluczowe z punktu widzenia problemu równości dwóch funkcji. Jako jedną z przesłanek, Frege zakłada, że obie funkcje przebiegają ten sam zbiór argumentów, są tego samego rodzaju i są sensowne po podstawieniu argumentów. Gdyby funkcje były różnego rodzaju, jedna mogłaby dotyczyć relacji przestrzennej, przykładowo *jest na północ od*, natomiast druga mogłaby przedstawiać wyrażenia dotyczące fizyki, przykładowo *jest lżejsze niż*. Jest jasne, że zbiór argumentów pierwszego zdania nie pokrywałby się z zbiorem argumentów drugiego wyrażenia. Frege podaje przykłady z zakresu matematyki, zatem wydaje się, że ten problem pozostaje niezauważony.

Frege definiuje, że dwie funkcje są wtedy równe sobie, gdy ich przebiegi są sobie równe. To oznacza, że:

$$\forall f \, \forall g \left(\left(f = g \right) \equiv \left(\forall x \left(f(x) = g(x) \right) \right) \right)$$

Powyższy zapis stara się wyrazić idee Fregego na sposób nowoczesny z użyciem narzędzi logicznych. Zmienna x dla obu funkcji wskazuje na tożsamość argumentów, co w efekcie pozwala funkcji f i funkcji g przyjmować taką samą wartość logiczną. Jeżeli badane funkcje są tylko wyrażeniami, czyli nie przysługują im wartości logiczne, to wartości funkcji są bliżej przez Fregego

[5] niem. *Wertverlauf einer Funktion*

nieokreślone. Jak można zauważyć na przykładzie powyższego zapisu, autor ten nie rozróżnia znaku równości dla różnych typów wyrażeń.

Archaiczny sposób zapisywania równości funkcji, przez G. Fregego, 1 polega na wskazaniu elementu zmiennego tj. argumentu. Przebieg funkcji nie jest określony dodatkowym znakiem, lecz powtórzeniem całej funkcji z dodatkowo podkreślonym argumentem. Zatem przebieg funkcji $x^2 - 4x$ Frege zapisuje w postaci $\grave{\epsilon}(\epsilon^2 - 4\epsilon)$. W ten sposób zapis

$$\grave{\epsilon}(\epsilon^2 - 4\epsilon) = \grave{\alpha}(\alpha(\alpha - 4))$$

oznacza równość dwóch przebiegów funkcji. Należy podkreślić, że powyższy zapis nie oznacza tożsamości funkcji czy jej identyczności, lecz jedynie tożsamość wartości funkcji, precyzyjnie oznacza sytuację, gdy dla tych samych argumentów funkcje przyjmują te same wartości.

Przypadek, gdy funkcja jest częścią równania matematycznego, przykładowo $x^2 = 1$, jest rozpatrywany dodatkowo. Otóż Frege w takim przypadku również wyróżnia wartość takiej funkcji, która współcześnie jest raczej nazywana równaniem. Równanie takie przyjmuje wartość logiczną, odpowiednio Prawdy lub Fałszu, dla odpowiednich argumentów z zakresu liczb. W proponowanym przykładzie dla argumentów z zbioru $(0, 2, 3)$ wartością badanego wyrażenia jest Fałsz, natomiast dla argumentu 1 – Prawda. Co oznacza, że:

$$\{f(x) = (x^2 = 1)\} \rightarrow \{f(0) = F \ \wedge \ f(1) = V \ \wedge \ f(2) = F \ \wedge \ f(3) = F\}$$

gdzie V oznacza wartość prawda, a F – fałsz.

Frege stara się definiować dotychczas nieokreślone słowa na gruncie wprowadzonego rachunku zdań. Przykładem może tutaj być słowo *pojęcie*. Było ono używane rozmaicie w ówczesnym okresie, czasem nawet w sensie psychologicznym jako to, co jawi się umysłowi. Jest to konsekwencja tego, że okres, w którym tworzy Frege, cechuje rozwój nauk psychologicznych i psychologizmu. Psychologizm polegał na redukcji, sprowadzał aktywność człowieka, teoretyczną czy praktyczną, do wyjaśnień opartych ściśle na psychologii człowieka. *Pojęcie* było również opisywane wówczas w sensie logicznym, czyli jako definicja innego słowa.

Natomiast dla Fregego *pojęcie* jest to taka funkcja, której wartością jest zawsze wartość logiczna. Ta prosta definicja umożliwia zdefiniowanie zakresu pojęć i jego równości. Zakresem pojęć jest przebieg danego pojęcia, które jest określone przy pomocy funkcji. Dwa pojęcia są sobie równe, wtedy i tylko wtedy gdy oba oznaczają to samo. Przykład podawany przez Fregego dotyczy matematyki tj.

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$

Zgodnie z wyrażonymi poglądami, równość oznacza równość pomiędzy denotacjami. Myśli zawarte w przykładowych funkcjach mogą być zupełnie inne. Stąd Frege wprowadzając takie rozróżnienie odnosi się do swojego znanego rozróżnienia *sensu* od *znaczenia*. Rozróżnienie to jest dokładniej opisane w [Frege, 1891].

W ten sposób Frege unika krytyki, która natychmiast nasuwa się wobec powyższego zapisu. Wystarczy przecież podać dwie funkcje, które mogą

być pojęciami, przykładowo *jest śmieszny* i *jest słoneczny*. Dla argumentów, które pochodzą z zbioru ściśle określonych przedmiotów, wartościami przedstawionych funkcji będą wartości logiczne. Jest możliwe takie dobranie zbioru argumentów, dla których przebiegi obu funkcji będą identyczne. Stan ten nie oznacza jednak równości obu pojęć. Pomimo tych samych przebiegów oba pojęcia nie są zamienne ze sobą, co jest kolejnym warunkiem wzajemnej równości.

Przykładowe pojęcie *kawaler* jest przedstawiane zaś w formie zdania *Kawaler jest to nieżonaty mężczyzna*. Takie zdanie, które jest funkcją dla argumentu *kawaler* jest prawdziwe, lub fałszywe, nawet jeśli podstawić jako argument, przykładowo słowo *Pegaz*. Tu wątpliwości budzi sposób stwierdzania wartości funkcji. Wydaje się, że kryterium prawdziwości przyjmowane przez Fregego jest klasyczne, czyli pojmowane jako zgodność rzeczy z myślą. Jednak owa zgodność jest milcząco zakładana jako powszechnie obowiązująca. O ile sprawa jest oczywista w przypadku przedmiotów konkretnych, to sprawa się silnie komplikuje dla przedmiotów niekonkretnych, czy nawet mitologicznych, istniejących jako pojęcie języka naturalnego. Jaką wartość przyjmuje funkcja *jest Pegazem*? Klasyczne kryterium prawdziwości jest w tym miejscu niewystarczające.

Zakresem pojęć należy nazywać przebieg funkcji, której wartością dla każdego argumentu jest wartość logiczna. Jak pokazano, definicja zakresu pojęć jest nieścisła. O ile Frege mówiąc o przebiegu funkcji przytacza przykłady związane z matematyką, o tyle w przypadku próby zbadania zwykłych funkcji problematyczne staje się określenia warunków dotyczących zbioru argumentów czy też sposobu potwierdzenia wartości. Przykładowo dla funkcji *zdobyli Troję* można podać całą listę argumentów, przykładowo *Persowie, Rzymianie, Trakowie*, które nie będą tworzyły prawdziwego zdania. Zatem wartością funkcji będzie fałsz. Można podać sensowne argumenty, przykładowo *Polacy, Niemcy, Francuzi*, które również nie będą tworzyły prawdziwego zdania. Frege nie precyzuje niestety, które argumenty są poprawne, ani nie analizuje, jaką wartość przyjmują te zdania, które mają argumenty nie do zaakceptowania dla przeciętnego użytkownika języka.

2.2. Formuła logiczna

Gottlob Frege nie wypowiada się jasno na temat formuły logicznej. Można wyróżnić u niego dwa odmienne podejścia do tego pojęcia. Jedno z nich należy wywodzić z okresu języka pojęć, natomiast drugie zarysowane zostało w zbiorze artykułów, które publikowane były pomiędzy wydaniami jego wielkich dzieł.

Próbując pokusić się tutaj o definicję formuły należałoby stwierdzić, że taka definicja musiałaby zostać utworzona przez czytelnika na podstawie wskazówek zawartych w dziełach tego badacza. Mogłaby brzmieć:

Formuła logiczna to połączenie znaków, gdzie wszystkie znaki są albo spójnikami, albo zdaniami, albo znakami specjalnymi. Znakami specjalnymi są kreska treści, kreska twierdzenia czy znak negacji. Spój-

niki łączą zdania proste w zdania złożone. Zdania proste mogą być dalej poddawane analizie i zapisane jako funkcje. Funkcja jest połączeniem znaku oznaczającego funkcję i znaku argumentu.

Badając dalej *Begriffschrift*, opisany w [Frege, 1879], można zauważyć przede wszystkim brak wyjaśnień na temat składni budowanych zdań. Wprowadzane zdania elementarne mogą należeć tylko do dwóch rodzajów:

— zdania oznajmujące — oznaczane pierwszymi dużymi literami alfabetu greckiego, przykładowo A, B, lub Γ. Są podstawowymi składnikami budującymi dalsze wyrażenia zapisane ideograficznie.

— funkcje — jedno– lub wielo–argumentowe, oznaczane końcowymi literami alfabetu greckiego wraz z argumentami ujętymi w nawiasy, przykładowo $\Phi\ (A,\ B)$. W ten sposób do zakresu elementarnych zdań wprowadzone zostają funkcje.

W [Frege, 1879] autor przedstawia różne kombinacje kresek i przytacza natychmiast ich prawidłowe znaczenie. Przy tym nie ogranicza w żaden sposób możliwości budowania nowych zdań. Zasad określających poprawność wyrażeń należy się domyślać. Zdania złożone, które składa się z zdań prostych połączonych implikacjami mają wspólny początek w dokładnie jednej asercji lub, gdy nie są twierdzeniami, w kresce treści. Każda pozioma kreska winna kończyć się pojedynczym zdaniem prostym lub funkcją. Te i inne uwagi, przykładowo zasada nieprzecinania się kresek, nie są niestety jasno określone, nawet jako dygresje bądź uwagi na marginesie.

Ciekawym zadaniem byłoby zaproponowanie algorytmu formalizacji zdań. W ten sposób możliwe stałoby się wskazanie dodatkowych problemów, jakie wynikają translacji. Zatem algorytm tworzenia formuły według G. Fregego składa się z następujących kroków:

1. wskazanie zdań prostych – zdanie proste to jest te, które może być zapisane jako funkcja tj. jako funktor zdaniotwórczy od argumentu nazwowego w dzisiejszej terminologii. Nie jest podrzędnie złożone. Wydaje się, że wszystkie zdania oznajmujące można zapisać w formie funkcji. W tej części pracy badacz winien określić także relacje pomiędzy zdaniami prostymi.
2. detekcja zdania prostego – należy wykryć w każdym prostym zdaniu jego części niezmienne, czyli funkcje, i części zmienne tj. argumenty funkcji. Warto podkreślić, że wybór danego podziału zdania prostego na obie części jest wysoce arbitralny. Każdy badacz może wybrać całkowicie inny podział.
3. zamiana wyróżnionych elementów – wybrane elementy należy zamienić na odpowiednie wyrażenia, które będą oznaczały, na mocy wyboru, funkcje i argumenty.
4. synteza uzyskanych informacji – ostatnim krokiem jest złożenie zebranych wyrażeń i połączenie ich odpowiednio ułożonymi kreskami. W ten sposób badacz, wykonujący algorytm z należytą starannością, otrzymuje piktogram, który jest tożsamy z przetwarzanym zdaniem.

Tak opisany algorytm zostanie teraz sprawdzony przy pomocy przykładu zdania złożonego. Zdanie to należy do języka naturalnego i brzmi:

Malwy są albo żółte albo czerwone, a malwa Jeremiego wcale nie jest żółta, zatem musi być czerwona.

Proponowane zdanie jest przykładem sylogizmu dysjunkcyjnego, znanego również jako *modus tollendo ponens*. Jest to reguła klasycznego rachunku zdań, która potwierdza pewne zdanie poprzez zaprzeczenie jednego z członów alternatywy. Ten *modus* podobnie jak inne, przykładowo *modus ponendo ponens*, jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Jako taki jest zapisany:

$$\left[\Big(p \vee q\Big) \wedge \sim p\right] \to q$$

Ponieważ każda tautologia klasycznego rachunku zdań jest tautologią predykatów, *modus tollendo ponens* można także zapisać jako zdanie z predykatem uniwersalnym:

$$\forall x \Big(\phi(x) \vee \psi(x)\Big) \wedge \sim \phi(x) \to \psi(x)$$

Przed przystąpieniem do przeprowadzenie procesu zamiany przykładowego zdania na formułę w języku zaproponowanym przez G. Fregego, należy najpierw doprowadzić do takiej postaci, która będzie zawierać jak najwięcej informacji. Wiadome jest, że zdania języka potocznego często są uproszczone. W trakcie wypowiadania nie zawierają dodatkowych informacji wynikających z kontekstu rozmowy. Często używane są okazjonalizmy. Niektóre zdania są pozbawione podmiotu, ponieważ słuchacz samodzielnie uzupełnia te informacje opierając się chociażby na wcześniej otrzymanych informacjach od przemawiającego czy, lepiej, nadawcy komunikatu.

Badane zdanie po przeprowadzeniu wstępnych działań brzmieć będzie następująco:

Wszystkie malwy są żółte lub wszystkie malwy są czerwone, i malwa Jeremiego nie jest żółta, zatem malwa Jeremiego jest czerwona.

Zgodnie z proponowanym algorytmem, badacz ma jasno określone kroki dalszego działania:

1. wskazanie zdań prostych

   W badanym przykładzie można wyróżnić następujące zdania proste:

   — *wszystkie malwy są żółte*

   — *wszystkie malwy są czerwone*

   — *malwa Jeremiego jest żółta*

   — *malwa Jeremiego jest czerwona*

   Pierwsze dwa zdania zawierają kwantyfikator uniwersalny. Trzecie zdanie jest zanegowane. Ostatnie dwa nie dotyczą wszystkich elementów, a jednego wyróżnionego, który jest jasno określony poprzez wskazanie imienia własnego. Pomiędzy zdaniami prostymi zachodzą związki koniunkcji, alternatywy i implikacji. Wskazywanie ich nie jest potrzebne.

2. detekcja zdania prostego

   Elementami zmiennymi są odpowiednio *malwy* i *malwa Jeremiego*. Adekwatnie elementami niezmiennymi są predykaty *jest żółty* i *jest czerwony*. W wyróżnionych zdaniach prostych wskazuje na to fakt, że zamiast wspominanych *malw* można podstawić do wyróżnionych predykatów dowolne

inne przedmioty bez utraty znaczenia czy sensu. Warto tutaj zauważyć, że równie poprawna analiza mogłaby wskazać jako funkcję wyrażenie *malwy są*. G. Frege pomija ten problem, zakładając słusznie intuicję przyszłych badaczy.

3. zamiana wyróżnionych elementów
   Dla pewnego ułatwienia przedmioty *malwy* będą reprezentowane przez m. *Malwa Jeremiego* zaś będzie oznaczana przez a. Za cechę *bycia żółtym* zostanie podstawiona litera Z, natomiast *cecha czerwoności* – C. Dobór takich liter jest podyktowany jedynie przybliżeniem do nazw przedmiotów i cech. Nie ma żadnego związku z rzeczywistymi przedmiotami. Jest całkowicie arbitralny.
4. synteza uzyskanych informacji
   Zgodnie z współcześnie przyjętą notacją badane zdanie powinno być zapisane w następującej postaci:

$$\Big(\Big(\forall m\, Z(m) \;\vee\; \forall m\, C(m)\Big) \wedge \sim Z(a)\Big) \;\rightarrow\; C(a)$$

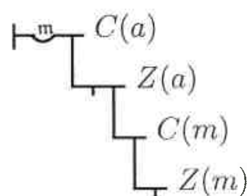
Uważny czytelnik może być zaskoczony przejściem od zmiennej m do przedmiotu a, który oznacza konkretną rzecz. Ta czynność, które pozornie jest poprawna, jest oparta o znane już zdanie elementarne:

$$\forall\, a\Big(f(a) \;\rightarrow\; f(c)\Big)$$

Jednocześnie należy zaznaczyć, że zadanie nie polegało na przedstawieniu tautologii, która była wzorem przykładu, lecz pokazaniem sposobu zamiany dowolnego zdania złożonego na język proponowany przez G. Fregego. Ostatnim krokiem, jaki winien być wykonany jest narysowanie zdania. W systemie nie występują jako elementarne operacje ani koniunkcja ani alternatywa. Dlatego też należy najpierw sprowadzić badaną formułę do wyrażenia złożonego z implikacji i negacji. Zatem badane zdanie winno być zapisane:

$$\forall m\Big(\Big(\sim Z(m) \;\rightarrow\; C(m)\Big) \rightarrow\; Z(a)\Big) \;\rightarrow\; C(a)$$

Zależności pomiędzy zdaniami prostymi natomiast można zapisać w formie kombinacji kresek poziomych i pionowych. Widok całego *drzewka zdania* pokazuje, czy zdanie złożone jest poprawnie przetłumaczone na notację Fregego. Wspólnym dla wszystkich zapisów jest brak przecinających się kresek. Ponadto wszystkie kreski zbiegają się do jednego *korzenia*. Jest konieczne, aby pierwsze zdanie było twierdzeniem. W ten sposób złożone wyrażenie staje się połączeniem prostych twierdzeń, czyli pewnym ciągiem dedukcyjnym. Jednocześnie na *gałęziach* mogą występować jedynie proste zdania lub funkcje. Dwa zdania złożone mogą zostać połączone jedynie na podstawie, wcześniej omawianej, reguły wynikania. Przykładowe zdanie może być przedstawione jako następujący obrazek:



Prace nad algorytmem i przy przetwarzaniu zdania języka naturalnego wykazały dwa poważne błędy zawarte w propozycji G. Fregego. Przede wszystkim nie istnieją określone reguły wyróżniania części niezmiennych, funkcji, w zdaniach prostych. Tak jak to wcześniej było wspomniane, tylko doświadczenie badacza nakazują mu wybór takich wspólnych funkcji. W przeciwnym wypadku nawet zdania złożone, intuicyjnie pojmowane jako prawdziwe, byłyby nie do przełożenia, a zatem także nie do udowodnienia.

Kolejnym problemem jest brak wspólnego rozwiązania problemu nazw, które nie są imionami własnymi, a które jednocześnie są dość precyzyjnie określone. W badanym przypadku dotyczyło to wyrażenia *malwa Jeremiego*. Wyrażenie nie jest nazwą własną. Przy tym jest silnie zdefiniowany przedmiot. G. Frege nie wspomina o takim wypadku w swoich pracach.

Zupełnie odmienne jest traktowane formuła w przypadku artykułów. Tutaj Frege nie używa jako przykładów zdań złożonych. W [Frege, 1904] przy opisywaniu zagadnienia definicji funkcji korzysta z prostych równań matematycznych. Natomiast jako przykłady w [Frege, 1892b] są podawane zdania w języku naturalnym, które dopiero później są analizowane pod kątem ich sensu lub znaczenia.

Podsumowując, formuła logiczna w filozofii Fregego może być złożona, gdy jest połączeniem wielu zdań prostych przy pomocy dwóch operacji, przy czym poszczególne części formuły mogą być podrzędne wobec innych. Niemniej należy podkreślić, że formuła nie zostaje jako taka zdefiniowana semiotycznie. Nie spotkałem się również z uwagami dotyczącymi składni. Temat poprawności zdań czy wyrażeń, problem wynikania jest pominięty lub, dość często, pobieżnie wyjaśniany. Zatem prace G. Fregego należy traktować pod kątem zagadnienia formuły logicznej bardziej jako wprowadzenie niż jako szczegółowe i dokładne wyjaśnienia problemu formuły logicznej.

2.3. Zagadnienia poboczne

A. Korcik w [Korcik, 1948], omawiając prace Fregego, przytacza opinię, że symbolika proponowana przez tego autora jest bardzo dokładna i subtelna. Brak nawiasów, czy punktów lub innych elementów potrzebnych do zaznaczenia kolejności, jest zaletą. Warto dodatkowo podkreślić jednoznaczność takiej symboliki. Jednak przy tym jest trudna do nauczenia czy zrozumienia. Utrudnia to także fakt, że formuły należy czytać wertykalnie, co jest sprzeczne z nawykami europejskiego czytania, które wykształca odruch widzenia od lewej do prawej. Stąd prace G. Fregego są bardzo trudne w odbiorze dla potencjalnego czytelnika.

Innym zarzutem wobec języka formalnego G. Fregego jest to, że nie zostaje zdefiniowana operacja wynikania. Wydaje się, że jest ona przyjmowana

intuicyjnie. Ze zdania pierwszego wynika zdanie drugie. W porównaniu z propozycjami późniejszych autorów, autor pomija temat formalizacji zasady wynikania. Jednocześnie pytanie, co można wywnioskować na temat połączenia dwóch zdań, pozostaje bez odpowiedzi.

Na końcu należy podkreślić, że Frege bardzo dużo miejsca poświęca w swoich badaniach tematom związanym z podstawami matematyki, czy precyzyjniej, arytmetyki. Jest to zagadnienie w ówczesnym czasie szeroko analizowane. Gdy problem ugruntowania arytmetyki pozostanie na boku, Frege staje się najpierw filozofem, a dopiero potem logikiem. Przy tym, jak dalej zostanie pokazane, wiele jego poglądów filozoficznych, przykładowo dotyczących ontologii, nie jest oparta na precyzyjnych rozumowaniach, lecz raczej na bezrefleksyjnie przyjmowanych założeniach, które prawdopodobnie pochodzą z potocznych wyobrażeń na dany temat.

2.3.1. Zobowiązania ontologiczne formuł

Ontologia proponowana przez G. Fregego należy do jednych z bardziej intuicyjnych systemów w historii filozofii. Jest to spowodowane przede wszystkim zbieżnością pomiędzy tym, co proponuje Frege a potocznymi poglądami na temat istnienia przedmiotów. W [Perelman, 1937] zostaje wykazane, że, na podstawie analizy różnych pism, Frege miał określone poglądy ontologiczne.

Wszystko, co istnieje, w filozofii G. Fregego należy do jednego z trzech przestrzeni lub, lepiej, światów. Wszelkie byty można zaliczyć albo do świata fizycznego, albo do świata przedstawień, albo do świata idei, jak to jest wyjaśnione w [Perelman, 1937]. Świat fizyczny obejmuje przede wszystkim przedmioty konkretne, ale także wydarzenia historyczne. Przedstawienia przykładowo to wszelkie doznania psychiczne podmiotów poznających rzeczywistość. Idee natomiast to przedmioty niezmienne i pozaczasowe, które istnieją wiecznie. Pomiędzy tymi trzema rzeczywistościami istnieje łącznik w postaci podmiotu poznającego, czyli osoby ludzkiej. Bez tego elementu poszczególne światy są między sobą niezależne. W rezultacie G. Frege popiera stanowisko, że człowiek posiada wgląd w trzy odmienne światy. Jest to prosta antropologia, bowiem traktuje przedstawianą kondycję jednostki ludzkiej bezkrytycznie.

Ten podział po skrzyżowaniu z podziałem semantycznym, ukazuje zależności pomiędzy językiem a ontologią. Frege wyróżnia trzy podstawowe kategorie semantyczne: nazwy, symbole funkcyjne i zdania. Nazwy odnoszą się raczej do pojedynczych przedmiotów. Funkcje opisują, jak to wyżej było ukazane, niezmienne elementy w przestrzeni. Zdania łączą oba powyższe elementy w jeden i składają się z nazw i funkcji. W poniższej tabeli przedstawiam układ kategorii semantycznych i odpowiadających im denotacje (*znaczenia*) z każdego świata.

Denotacje w ontologii G. Fregego.			
kategoria semantyczna	*świat materialny*	*świat przedstawień*	*świat idealny*
nazwa	przedmiot	przedmiot psychiczny	liczba
symbole funkcyjne	własności lub relacje	własności psychiczne	powszechnik
zdanie	stan rzeczy	sens zdania	Prawda lub Fałsz

Słowem wyjaśnienia, *Prawda* jest to zbiór wszystkich zdań prawdziwych. Przedstawienia odróżniają się od innych kategorii tym, że posiadają nosicieli. Nosicielem jest osoba, która utrzymuje dane wyobrażenie w świadomości. Powszechniki są znaczeniem idealnym funkcji. Liczby są denotacją idealną nazw. Każde twierdzenie naukowe posiada odpowiednią denotację, Prawdę lub Fałsz. Sens, czy treść tego twierdzenia również należy do świata idealnego, co jest podkreślone w [Perelman, 1937].

Zdania składają się z *nazw* i *funkcji*. Zatem podstawowy podział wyrażeń to podział na nazwy lub symbole funkcyjne. Kolejny podział dotyczy każdego znaku językowego. Otóż każdy taki znak posiada konotację (*sens*)[6], denotację (*znaczenie*)[7] i odpowiada mu pewne przedstawienie w świadomości, co jest podkreślone w [Frege, 1892b]. Nazwy mają odniesienie do realnych lub wyobrażonych przedmiotów i mają określoną konotację. Konotacją zdania są myśli zawarte w nim zawarte, natomiast denotacją jest Prawda lub Fałsz czyli wartości logiczne.

Wydaje się, że dla Fregego istnieją elementy z każdego świata. W zależności od danej nazwy lub funkcji, odniesieniem są przedmioty z odpowiedniej rzeczywistości. Zatem można powiedzieć, że ontologia tego filozofa jest bardzo bogata. Istnieją w niej zarówno przedmioty fizycznie bytujące, jak i przedmioty fantazji. Nazwa *obecny król Francji* w ontologii Fregego desygnuje przedmiot z zakresu świata przedstawień. Jest nazwą bez rzeczywistej denotacji.

Bogata ontologia G. Fregego jest wyrazem ówczesnego , jeszcze klasycznego pojmowania sprawy istnienia bytów. Dopuszczenie wielości istniejących przedmiotów wynikało, prawdopodobnie, bezpośrednio z prostoty systemu. Możliwym tłumaczeniem jest tutaj także wpływ filozofii XIX wieku, szczególnie niemieckiej. W kolejnych latach pejzaż ontologiczny stawał się coraz bardziej ubogi, ponieważ niektóre byty nie znajdowały koniecznego uzasadnienia ich istnienia. Jak można zauważyć, stanowisko G. Frege jest bardzo zbliżone do idealizmu platońskiego. Dowodzi tego, przede wszystkim, wprowadzenie idealnych bytów, które są wzorcami dla bytów rzeczywistych, ale także traktowanie Prawdy i Fałszu jako niezmiennych elementów ontologii.

[6] *niem. Sinn*
[7] *niem. Bedeutung*

3. Formuła logiczna u Bertranda Russella

Bertrand Russell wyrasta na firnamencie filozofii pierwszej połowy XX wieku na gwiazdę pierwszej wielkości. Dzieje się tak między innymi dlatego, że był współautorem, wraz z Alfredem North Whiteheadem, wielkopomnego dzieła *Principia Mathematica*. Dzieło to, wydane po raz pierwszy na początku XX wieku, słusznie odwołuje się tytułem do wielkiego dzieła Isaaca Newtona. Podobnie przedstawia podstawy matematyki, ale wyłożone na sposób nowoczesny w oparciu o nowo opracowany aparat logiki.

W *Principia Mathematica* najpierw jest przedstawiona logika matematyczna. Wyniki uzyskane na tym polu przez współautorów, B. Russella i A.N. Whiteheada, są efektem ich ciężkiej pracy. Badania, a także niektóre konsekwencje wynikają bezpośrednio z geniuszu autorów i ich wielkiej intuicji oraz doświadczenia, ale także z wyników innych badaczy tworzących na początku XX wieku. Dowodzi tego fakt zaadaptowania notacji, opracowanej przez G. Peano, na potrzeby tego dzieła.

Według autorów, logika matematyczna składa się z teorii dedukcji, teorii zmiennych pozornych i logiki relacji. Na takim fundamencie dopiero budowana jest arytmetyka i inne działy matematyki. Ze względu na zakres tematu i ograniczenie czasowe, poniżej zostanie przedstawiona logika matematyczna według [Russell, 1910-1913]. Dodatkowo, niektóre zagadnienia zostaną uzupełnione na podstawie [Russell, 1919], choć ta pozycja została wydana dopiero po I wojnie światowej.

W ten sposób przedstawiona koncepcja formuły logicznej będzie prezentować punkt widzenia logiki opartej na teorii mnogości. Biorąc pod uwagę odniesienia i powoływanie się autorów na związki z G. Fregem, koncepcja ta wiąże się z wcześniejszymi pracami Fregego.

W niniejszej pracy logika i teoria mnogości zostaną przedstawione na podstawie drugiego wydania *Principia Mathematica*. Niektóre elementy będą rozszerzone na podstawie innych artykułów B. Russella, niemniej podstawą prezentacji pozostaje to niezwykłe dzieło B. Russella i A.N. Whiteheada.

3.1. Język *Principia Mathematica*

Obaj autorzy, zanim przejdą do omawiania podstaw matematyki czy teorii klas, najpierw prezentują wyjaśnienia dotyczące notacji i idei, jakie ona opisuje. Opracowana notacja jest oparta na propozycji Peano. Wiele symboli jest podobnych, w tym użycie systemu kropek jako znaku nawiasów. Poniżej jednak wszelkie potrzebne formuły będą zapisywane w notacji współcześnie uznawanej w środowisku naukowym. W ten sposób, przede wszystkim, zo-

stanie zapewniony konieczny most pomiędzy trzema przedstawianymi światopoglądami.

3.1.1. Notacja i podstawowe idee

Zmienne Wykład, zawarty w *Principia Mathematica*, rozpoczyna się od omówienia zmiennych. Idea zmiennych, jako części wyrażenia logicznego, jest bardziej ogólna od podobnej idei zmiennych wykorzystywanych w matematyce. Zmienne logiczne są, przede wszystkim, niezdefiniowane i mają wieloznaczną denotację tj. można pod nie podstawiać różne przedmioty. Ponadto posiadają określoną możliwość bycia rozpoznawanymi jako identyczne. Oznacza to, że wiele zmiennych może wystąpić razem w tym samym kontekście i każda będzie miała odmienna, wbrew, przykładowo, podobieństwu znaku oznaczającego daną zmienną.

W *Principia Mathematica* rozróżniane są dwa rodzaje zmiennych pod kątem możliwych wartości. Pierwszy z nich to zmienne ograniczone[1], gdzie zmienne mogą przyjmować wartości jedynie z ograniczonego zakresu spośród wszystkich możliwych. Drugi z nich to zmienne nieograniczone, gdzie nie ma wprowadzonych żadnych granic co do wartości. Jest oczywiste, że zmienne nieograniczone są bardziej wygodne dla potrzeb badań logicznych.

Istnieją określone zasady dotyczące wykorzystania liter na oznaczenie zmiennych. Zmienne będą oznaczane poprzez pojedyncze litery, podobnie jak stałe. Niemniej symbole nie powinny się powtarzać. Dla zmiennych są przeznaczone małe litery alfabetu łacińskiego. Duże litery natomiast otrzymają stałe znaczenie. Litery p, q, r będą znakami zdań, natomiast funkcje będą zaznaczane poprzez litery alfabetu greckiego takie jak ϕ, χ, ψ lub litery f czy też g.

Podstawowe funkcje zdaniowe B. Russell i A.N. Whitehead opisują podstawową funkcję zdaniową. Jest ona zdefiniowana jako funkcja ze zdaniami jako argumentami. Autorzy wyjaśniają przy tym, że połączenie dwóch zdań, które nie są koniecznie jednoznaczne, jest bardziej złożone niż pojedyncze zdanie. Jako podstawowe znaki zostają zdefiniowane operacje:
— funkcja negacji
— suma logiczna czyli funkcja dysjunkcji
— iloczyn logiczny lub, inaczej, funkcja koniunkcji
— funkcja równoważności
— funkcja implikacji

Opisywanie powszechnie opracowanych i znanych funkcji z, odpowiednio, jednym lub dwoma argumentami zdaniowymi nie jest celem tej pracy. Odpowiednie informacje można uzyskać przykładowo w [Borkowski, 1991].

Autorzy *Principia Mathematica* proponują odmienną notację dla proponowanych funkcji. Przedstawiane wyjaśnienia na temat działań dotyczą przede wszystkim sposobu czytania lub znaczenia wprowadzanych symboli. Konieczność wprowadzenia takich funkcji jest oczywista. Warto przy tym

[1] ang. restricted

podkreślić, że autorzy nie wyjaśniają, dlaczego proponują ten, a nie inny zestaw podstawowych funkcji zdaniowych. Jest to ważne, ponieważ wcześniej omawiany G. Frege w [Frege, 1879] opiera swój system jedynie na dwóch funkcjach tj. negacji i implikacji.

Funkcja implikacji, która jest ważna ze względu na problem wynikania, jest traktowana przez autorów klasycznie jako funkcja dwóch argumentów zdaniowych takich, że

$$\sim p \vee q$$

przy tym zostaje wyróżnione, że taka funkcja jest implikacją materialną. Jeśli zmienne są pozorne[2], wtedy implikacja jest nazywana formalną.

Wynikanie Proces wynikania jest powiązany z tautologią *modus ponendo ponens*. Tak jak u G. Frege, B. Russell przyjmuje regułę odrywania, która jest obecnie opisywana w postaci:

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B}$$

Niemniej należy podkreślić pewną różnicę. Dla autorów konieczne jest podkreślenie, że przesłanki wykorzystane w dowodzie są stwierdzeniami. Zatem powyższa reguła odrywania winna być zapisana następująco:

$$\frac{\vdash p \;\rightarrow\; \vdash q, \vdash p}{\vdash q}$$

Może być również zapisana w podobny, który podkreśla stwierdzanie poprzedników jako części wnioskowania tj.:

$$\frac{\vdash \; (p \;\rightarrow\; q), \vdash p}{\vdash q}$$

W obu przypadkach najważniejsze jest to, że poprzedniki muszą być twierdzeniami. Tylko w ten sposób następnik również będzie stwierdzony.

Definicje Definicja, według autorów, to stwierdzenie, czy też lepiej deklaracja, że określony symbol lub zestawienie symboli ma to samo znaczenie co inna kombinacja symboli. W pewnych określonych wypadkach wyrażenie, które jest definiowane i wprowadzane w niektóre zdania, może zostać zastąpione przez definiens. Dzieje się tak przykładowo dla symboli niezupełnych[3].

W opisywanym dziele zostaje rozróżniony definiens od definiendum. Poprawna definicja winna być jasno rozdzielona znakiem równości, odpowiednio, na część definiowaną i część definiującą. Dodatkowo składnia wymaga wprowadzenia liter *Df.* dla oznaczenia wprowadzenia definicji. Znak równości bez tych liter ma zupełnie inne znaczenie. Zatem przykładowa definicja winna wyglądać:

$$p \rightarrow q \;=\; \sim p \vee q \quad Df.$$[4]

---

[2] ang. apparent

[3] ang. incomplete symbols

[4] $p \supset q \,.=.\, \sim p \vee q \quad Df.$

Należy wspomnieć na marginesie tak wprowadzanej definicji, że takie wyrażenie nie jest prawdziwe lub fałszywe. Wyraża raczej wolę niż twierdzenie, dlatego też nie występuje w definicjach znak asercji. Jest możliwe pominąć temat definiowania, ponieważ w każdym miejscu, gdzie zostaje wprowadzony nowo definiowany znak można wprowadzić, bez uszczerbku na znaczeniu, definiens. Za definicjami przemawia jednak aspekt praktyczny. W ten sposób formuły nie stają się zbyt długie. Długie wyrażenia są trudniejsze do zrozumienia, co jest zaletą za wprowadzaniem skrótów w postaci definicji.

Wydaje się, że w omawianym dziele, gdyby wprowadzić rozróżnienie I. Kanta na zdania analityczne i syntetyczne, autorzy traktują definicje jako zdania zdecydowanie analitycznie. Definicje mają upraszczać formuły i operować już znanymi symbolami lub wyrażeniami. Pominięcie definicji jako zdań syntetycznych jest wyrazem rozsądku, ponieważ wprowadzanie nowych treści winno się odbywać na drodze wnioskowania niż poprzez autorytarne definiowanie. Zatem autorzy unikają dwóch podstawowych błędów w sztuce definiowania tj. błędu *idem per idem* i błędu *ignotum per ignotum.*

Twierdzenia elementarne B. Russell i A. Whitehead wprowadzają do systemu logicznego pewne twierdzenia, które są przyjmowane bez dowodu. Przyjęcie dokładnie takiego zestawu twierdzeń jest kwestią wyboru autorów. Takie zdania winny być wprowadzone, ponieważ, zgodnie z przyjętą zasadą odrywania, wszystkie wnioski wynikają z wcześniej przyjętych twierdzeń. Stąd zdania elementarne to założenia całego systemu.

System logiczny jest charakteryzowany poprzez dwa kryteria tj. pełność i niesprzeczność. Na tej podstawie można stwierdzić, czy rzeczywiście zbudowana konstrukcja nie jest błędna, czy prowadzi do antynomii. W pierwszej połowie XX wieku, w okresie budowania wielu odmiennych systemów logicznych probierzem poprawności systemu było wskazanie antynomii na gruncie systemu.

Pojęcie pełności systemu odnosi się do zespołu twierdzeń. Aby system był pełny, winien zawierać wszystkie te zdania uznawane za prawdziwe i umożliwiać przeprowadzenie dowodu takich zdań tylko na podstawie logicznych przesłanek. Natomiast aby system był niesprzeczny, nie może prowadzić do wniosków, które byłyby sprzeczne ze sobą.

W *Principia Mathematica* zostaje wprowadzonych 7 twierdzeń elementarnych:

1. Wszystko, wynika z prawdziwej przesłanki, jest prawdziwe[5].
2. $\vdash (p \vee p) \rightarrow p$[6]
3. $\vdash q \rightarrow (p \vee q)$[7]
4. $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$[8]
5. $\vdash p \vee (q \vee r) \rightarrow q \vee (p \vee r)$[9]
6. $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$ [10]

---

[5] ang. Anything implied by true premiss is true

[6] $\vdash: p \vee p. \supset .p$

[7] $\vdash: q. \supset .p \vee q$

[8] $\vdash: p \vee q. \supset .q \vee p$

[9] $\vdash: p \vee (q \vee r). \supset .q \vee (p \vee r)$

[10] $\vdash: .q \supset r. \supset: p \vee q. \supset .p \vee r$

Ostatnim siódmym aksjomatem jest twierdzenie o identyczności realnych zmiennych. Autorzy mają na myśli sytuację, gdy zostaną stwierdzone oddzielnie dwie różne funkcje zawierające x. W takim wypadku jest ważne, aby umieć rozróżnić, czy obie funkcje opisują identyczną niezdeterminowaną zmienną. Temat ten wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć i jest rozwijany na marginesie innych rozważań.

Funkcje zdaniowe Kolejnym wprowadzanym pojęciem jest pojęcie funkcji zdaniowych. Jest to specjalny typ wyrażeń, które mają strukturę funkcji, przykładowo Φx. Jeśli takiej zmiennej x, zostanie nadane określone znaczenia, funkcja stanie się twierdzeniem. Przykładowo, niech Φx będzie oznaczać *x jest niski*. Takie wyrażenie stanie się twierdzeniem, jeśli za zmienną x zostanie podstawiona nazwa własna – *Jan*. Wówczas wyrażenie będzie brzemieć *Jan jest niski*. Takie wyrażenie może być prawdziwe lub fałszywe, zatem jest zdaniem.

Autorzy wprowadzają dodatkowy znak w notacji dla wskazania dystynkcji pomiędzy wartością funkcji a jej treścią. Treść, czy lepiej, znaczenie funkcji jest zapisywana w następujący sposób $\Phi\hat{x}$, czyli poprzez dodatkowe znak nad zmienną funkcji. Zatem zapis Φx będzie się odnosił do wieloznacznej wartości takiej funkcji. Warto zauważyć, że funkcje zdaniowe nie są funkcjami w dzisiejszym znaczeniu.

Funkcje zdaniowe są podstawowym rodzajem funkcji. Spośród nich można wyróżnić funkcje, które są określane jako „opisowe". Przykładem tutaj może być funkcja *sin x* lub *ojciec x-a*. Ze względu na problematykę związaną z tym gatunkiem funkcji są one omówione w oddzielnym paragrafie.

Zasięg zmiennych Dla każdej zmiennej, która występuje w funkcji, można wskazać jej zasięg czyli zbiór argumentów. Argumenty są wszystkimi możliwymi zmiennymi, które można podstawić w badanej funkcji. W ten sposób powstaje pewien zbiór zdań, który zawiera wszystkie, nowoutworzone zdania, zarówno prawdziwe, jak i fałszywe. Zdania, które są prawdziwe, przy danym podzbiorze argumentów, są określane jako *spełnione*. Zatem sytuacja, gdy wartość argumentu x powoduje, że wartość funkcji Φx jest prawdziwe, jest nazwana *spełnianiem* $\Phi\hat{x}$.

Autorzy wyróżniają trzy możliwe przypadki, które opisują możliwe zasięgi zmiennych. Każdy z nich jest odmiennie zapisywany. Spośród nich tylko jeden może być w danej sytuacji prawdziwy. Zatem alternatywa możliwości to:

1. wszystkie zdania, dla podstawionych zmiennych, są prawdziwe. Symbolicznie zapisane to zdanie brzmi:

$$\forall x \Phi x$$[11]

2. niektóre zdania są prawdziwe:

$$\exists x \Phi x$$[12]

[11] $(x).\Phi x$
[12] $(\exists x).\Phi x$

3. żadne zdanie nie jest prawdziwe:

$$\forall x \sim \Phi x^{13}$$

W tym przypadku, tylko taki zapis jest poprawny, ponieważ jest precyzyjnym opisem sytuacji, gdy wszystkie zmienne podstawione w funkcji nie spełniają jej.

Obecnie powyższe rozważania są nadal obowiązujące. Autorzy opisując tak wyczerpująco możliwe zbiory zdań spełnianych przez zakres wykazali jednoznacznie uniwersalność zagadnień logicznych. Dzięki temu rozwiązania sprzed blisko 80 lat nadal są aktualne.

Zmienne pozorne Dla autorów tej monumentalnej pozycji ważne jest wyróżnienie pewnego typu zmiennych. Zmienne pozorne są specjalnie zaznaczone, ze względu na swoją pewną cechę, która obecnie może nie jest zbyt mocno podkreślana i wydaje się współcześnie wykształconemu czytelnikowi wręcz banalna.

Zmienne pozorne to te zmienne, które są wiązane przez kwantyfikatory. Dotyczy to zarówno zdań o postaci

$$\forall x \varphi(x)^{14}$$

jak i,

$$\exists x \varphi(x)^{15}$$

Zasięg możliwych podstawień zmiennych x wykracza poza zwykły zakres, przy którym dana funkcja ma jeszcze ogólnie przyjęte znaczenie. Z punktu widzenia autorów, pojawia się tutaj problem sensowności zdań wobec bardzo licznego, może nieskończonego, zbioru możliwych argumentów. Jak było to wcześniej wskazane przy omawianiu filozofii G. Fregego, kryterium odróżniania poprawnych zdań od absurdalnych jest bardzo ważne dla systemu logiki, który nie powinien prowadzić do żadnej antynomii. Dodatkowo, należy podkreślić, że funkcja w której x występuje jako zmienna pozorna nie jest, według autorów, funkcją zmiennej.

Zmienne rzeczywiste Zmienne rzeczywiste pojawiają się w systemie *Principia Mathematica*, gdy mowa o stwierdzaniu pewnych zdań, które składają się z pojedynczych funkcji, przykładowo $\phi(x)$. Zmienne te odróżniane są od zmiennych pozornych ze względu na ich znaczenie. Zmienne rzeczywiste desygnują precyzyjnie konkretnie istniejące obiekty. Zatem można założyć, że takie zmienne prowadzą do spełnienia zdań. Wynika to między innymi z wcześniej przyjętego założenia o stwierdzaniu badanej funkcji.

Druga ważna różnica, jaka zachodzi pomiędzy zmiennymi pozornymi a rzeczywistymi, jest taka, że każde wyrażenie, które zawiera zmienną pozorną

[13] $(x). \sim \Phi x$
[14] $(x).\varphi(x)$
[15] $(\exists x).\varphi(x)$

dotyczy każdej możliwej wartości tej zmiennej. Natomiast wyrażenie zawierające zmienne rzeczywiste, jeśli jest stwierdzane, wskazuje na każdą prawdziwą wartość funkcji. Stąd możliwe jest następujące wnioskowanie:

$$\frac{x = x^{16}}{\forall x \quad x = x^{17}}$$

Prowadzi to do wniosku, że zmienne rzeczywiste są podzbiorem zmiennych pozornych.

Twierdzenia, które łączą oba typy zmiennych Ze względu na różnice pomiędzy wyżej zarysowanymi typami zmiennych, autorzy *Principia Mathematica* przedstawiają tylko najważniejsze twierdzenia, które wskazują na łączenie zmiennych obu rodzajów. Spośród wszystkich możliwych zdań w tym temacie, te są kluczowe:

1. Jeśli funkcja zdaniowa może być stwierdzona, to twierdzenie dotyczące wszystkich zmiennych tej funkcji jest prawdziwe.
2. Jeśli $\phi(x)$ jest zawsze prawdziwe, to $\phi(y)$ również jest prawdziwe.
$$\forall x\phi(x) \rightarrow \phi(y)^{18}$$
3. Jeśli $\phi(y)$ jest prawdziwe, to dla niektórych argumentów $\phi(x)$ jest prawdziwe.
$$\phi(y) \rightarrow \exists x\phi(x)^{19}$$
4. Jeśli $\phi(x)$ jest zawsze prawdziwe i $\psi(x)$ jest zawsze prawdziwe, to $\psi(x) \wedge \phi(x)$ jest zawsze prawdziwe.
$$\Big(\forall x\, \phi(x) \ \wedge\ \forall x\, \psi(x)\Big) \ \rightarrow\ \forall x\Big(\ \phi(x)\ \wedge\ \psi(x)\ \Big)^{20}$$
Należy zaznaczyć, że przeciwna implikacja także jest prawdziwa tj.
$$\forall x\Big(\ \phi(x)\ \wedge\ \psi(x)\ \Big) \ \rightarrow\ \Big(\forall x\, \phi(x)\ \wedge\ \forall x\, \psi(x)\ \Big)^{21}$$
Przy czym warty jest podkreślenia fakt, że zmienne, które występują w obu funkcjach, winny być tego samego typu.

Formalna implikacja i równoważność Jeśli implikacja jest prawdziwa dla wszystkich wartości tj. $\forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))^{22}$, to taka implikacja jest formalna. Implikacja formalna stanowi, że dla każdej możliwej wartości x, jeśli poprzednik $\phi(x)$ jest prawdziwy, to następnik $\psi(x)$ jest również prawdziwy. W przeciwieństwie do zwykłej implikacji, która jest prawdziwa nawet wtedy, gdy poprzednik jest fałszywy, formalna implikacja opisuje silniejszy związek pomiędzy dwiema funkcjami. Związek ten podkreśla konieczność zachodzenia stosunku prawdziwości pomiędzy funkcjami występującymi w implikacji.

Druga ważna definicja to definicja ekwiwalencji. Dwie funkcje są formalnie równoważne, gdy każda pociąga za sobą drugą.

$$\forall x\Big(\ \phi(x) \equiv \psi(x)\ \Big)^{23}$$

[18] $\vdash .(x).\phi(x). \supset .\phi(y)$
[19] $\vdash: \phi(y). \supset .(\exists x).\phi(x)$
[20] $\vdash: .(x).\phi(x) : (x).\psi(x) :\supset .(x).\phi(x).\psi(x)$
[21] $\vdash: .(x).\phi(x).\psi(x).\psi(x) :\supset .(x).\phi(x) : (x).$
[22] $(x) : \phi(x). \supset .\psi(x)$
[23] $(x) : \phi(x). \equiv .\psi(x)$

W ten sposób, można w trakcie badań zastąpić jedną funkcję przez drugą, o ile występują w związku równoważności, w każdym wyrażeniu, które może być spełnione. Zatem zakresy zmiennych obu funkcji muszą być takie same.

Klasy Definicja klasy opiera się na wcześniej omawianej spełnialności. Klasa, którą autorzy *Principia Mathematica* nazywają także agregatem lub kolektorem, to wszystkie obiekty spełniające pewną funkcję zdaniową. Można także powiedzieć, że dana klasa jest zdeterminowana przez zakres wartości funkcji ϕx. Niejako natychmiast jest wprowadzone pojęcie klasy pustej, poprzez wskazanie przykładu funkcji zdaniowej, która jest zawsze fałszywa. Klasa pusta nie zawiera żadnych elementów.

Dla wyrażenia stosunku *x jest elementem klasy* α, zostaje wprowadzona notacja wzorowana na opisach Peano.

$$x \epsilon \alpha$$

Litera *epsilon* została wybrana ze względu na bycie pierwszą literą słowa $\epsilon\sigma\tau\iota$. Słowo to jest greckim odpowiednikiem słowa *jest*.

B. Russell i A.N. Whitehead w kolejnych akapitach swojej pracy opisują kolejne cechy wprowadzanych pojęć. Między innymi definiują pojęcie relacji czy negację klasy. Jednak przedstawianie całej podbudowy teoretycznej lub ograniczenie się do samych definicji zagadnienia klasy może spotkać się z zarzutem symplifikacji, co biorąc zakres omawianego materiału jest słuszne. Zagadnienia te nie są przy tym istotne także dla problemu formuły.

Deskrypcje i funkcje deskryptywne Można powiedzieć, że autorzy *Principia Mathematica* traktują język angielski jako wzorzec dla wszystkich możliwych formuł. Dowodzi tego wprowadzenie pojęcia *deskrypcji*. W samym tekście wspomnianego wyżej dzieła nowe słowo jest wprowadzone jako równoważnik frazy „*the* so-and-so". Zatem deskrypcje odnoszą się do rodzajnika *the*. Pierwsze przykłady, jakie autorzy proponują, to *A is „the" son of B*, co potwierdza ich intuicje dotyczące tego typu pojęć. W celu poprawnego przedstawienia idei deskrypcji, dodatkowo zostanie przywołana tutaj pozycja [Russell, 1919], która powstała kilka lat po pierwszym wydaniu *Principia Mathematica*.

Deskrypcja może być dwojakiego rodzaju, określona lub nieokreślona. Deskrypcja określona dotyczy wyrażeń „*ta* rzecz taka a taka". Natomiast deskrypcja nieokreślona jest zawarta w wyrażeniu „*jakaś* rzecz taka a taka". B. Russell definiuje deskrypcje poprzez odwołanie się do nazwy jako odniesienia. W tym celu wprowadza i precyzyjnie analizuje przykład

Scott jest autorem „Waverleya",

gdzie *Scott* jest nazwą, natomiast *autor Waverleya* jest deskrypcją.

Dla oznaczenia deskrypcji zostaje wprowadzone poprzez definicję operator *iota*.

$$\exists!\ (\iota x)\, \phi x \ = \ \left[\exists c\, \phi x \ \equiv \ (x = c)\right]^{24}$$

[24] $\exists\,!(\iota x)\,(\phi x).\ =:\ (\exists c) :\ \phi x\ .\equiv .\ x = c\ \ Df$

Zatem operator *iota* wskazuje, że dla danej funkcji ϕx istnieje taka wartość funkcji, która jest jedna i jednocześnie jest stała.

Uwagi nad składnią Z pozostałych funkcji i oznaczeń omawianym w dziele, należałoby wspomnieć znak asercji i wartość prawdy[25]. Znak asercji jest specjalnym wyróżnieniem dla grupy zdań. Oznacza, że formuła, która następuje po nim, jest stwierdzona czyli jest prawdziwa. Ta funkcja jest potrzebna, aby rozróżnić pomiędzy dwoma zdaniami, które różnią się statusem twierdzenia. Zdanie z asercją jest traktowane jako prawdziwe, ponieważ zostało udowodnione lub jest przyjęte jako prawdziwe przez autorów. Dzięki temu można wprowadzić pojęcie implikacji formalnej.

Jeśli zdania jest prawdziwe, to wartością zdania jest prawda. W przypadku przeciwnym, wartością zdania jest fałsz. Autorzy wprowadzają tę dodatkową funkcję na wzór Fregego. Przedstawione wyjaśnienia nie precyzują tego, czym w rzeczywistości jest takie działanie. Jasno jest ukazany sposób użycia na podstawie przykładów.

Autorzy *Principia Mathematica* wprowadzają dla porządku system kropek, które odpowiednio pisane mają za zadanie porządkować formuły. Dla omawianego tematu, przytaczania odpowiednich zasad, które kierują użyciem kropek nie jest konieczne. Ważne jest natomiast wskazanie, że kropki mają dwojakie użycie w tej notacji. W jednym z nich są używane jako symbol iloczynu logicznego, w drugim zaś zastępują nawiasy i wskazują kolejność działań. Jest to dość niefortunne połączenie, ponieważ powoduje, że notacja staje się dość niejasna przy czytaniu przez niedoświadczonego czytelnika. Obecnie używana notacja stosuje w tym miejscu różne nawiasy, które jasno wskazują kolejność wykonywanych działań bądź zasięg kwantyfikatorów.

3.1.2. Teoria typów

Na początku XX wieku świat nauki był pod wielkim wrażeniem wyników badań nad formalnymi teoriami logiki czy nad podstawami matematyki. Bardzo szybko okazało się jednak, że teorie te obarczone są bardzo poważnym błędem antynomii. W najszerszym rozumieniu antynomia to para zdań należących do danej teorii, będących konsekwencją wcześniej przyjętych twierdzeń. Para taka charakteryzuje się dodatkowo tym, że jest sprzeczna. Możliwość dowiedzenia antynomii powoduje odrzucenie całej teorii na gruncie, której występuje taki przypadek. Teoria jest sprzeczna.

Autorzy *Principia Mathematica* rozwiązują problem antynomii poprzez wprowadzenia podziału wszystkich zmiennych, funktorów i zdań na typy. Teoria typów winna zapobiegać potencjalnym antynomiom teorii logicznej. Te kilka warunków, jeśli zostaną dodane do jakiejkolwiek teorii matematycznej czy logicznej, ma powodować, że zostanie usunięta możliwość powstania antynomii.

Zasada błędnego koła Analiza antynomii, które były wskazane w okresie pisania *Principia Mathematica*, pozwalała sądzić autorom, że bezpośrednią przyczyną był pewien rodzaj błędnego koła. Błąd ten powstaje w momencie,

[25] ang. truth-values

gdy przyjmuje się, że zbiór pewnych obiektów, przykładowo zdań, zawiera także element, który może być opisany środkami traktującymi zbiór jako całość.

Niech będzie dany zbiór wszystkich zdań F. Problem powstaje wtedy, gdy jedno z tych zdań stwierdza, że

wszystkie zdania są prawdziwe lub fałszywe.

Twierdzenie takie na nic nie wskazuje, ponieważ w badanym zbiorze F nie występuje taki element jak *wszystkie zdania*. Inaczej, dany zbiór, który składa się z wszystkich elementów danego rodzaju, przykładowo zbiór *wszystkich książek filozoficznych*, zawiera elementy, które zakładają z góry sumę wszystkich elementów. Niemniej taki zbiór nie posiada sumy wszystkich swoich elementów.

Autorzy *Principia Mathematica* proponują wprowadzenie zasady, dzięki której można uniknąć takiego stanu rzeczy. Zasada ta brzmi:

Cokolwiek, w danym zbiorze, wiąże się z elementami, które dotyczą „wszystkiego", musi być czymś spoza danego zbioru.

Zasada ta jest zwana zasadą błędnego koła. Pozwala uniknąć przyjmowania twierdzeń, które pociągają za sobą założenie dowodzonego wyrażenia.

Paradoksy logiki symbolicznej dotyczą różnego rodzaju obiektów: zdań, klas czy liczb porządkowych. Autorzy proponują wprowadzenie pewnych rozwiązań, które redukują twierdzenia o klasach lub relacjach do samych zdań bądź funkcji zdaniowych.

Definicja prawdy i fałszu Namysł nad spójnikami i próby ich dookreślenia alternatywy bądź negacji prowadzi bezpośrednio do analizy pojęć prawdy i fałszu. Pojęcia te, wedle autorów, są wieloznaczne. Aby prawidłowo wyjaśnić te zależności, należy rozpocząć od najprostszego typu prawdy.

Otóż uniwersum zawiera obiekty o różnych cechach i stojące w różnych relacjach wobec siebie. Niektóre z takich istniejących obiektów są złożone. Oznacza to między innymi posiadanie części, które są połączone różnymi zależnościami. Obiekt, który składają się z dwóch i tylko dwóch części jest postrzegany jako jeden. Obserwacja takiego obiektu może doprowadzić obserwatora do sądu, że badany obiekt składa się z dwóch części pomiędzy którymi zachodzi określona relacja. Sąd taki właściwie wyciągnięty z dostępnych danych musi być prawdziwy. Zatem sąd, który stwierdza istnienie pewnych obiektów i relację pomiędzy nimi, jest prawdziwy, wtedy i tylko wtedy gdy takie obiekty i relacje rzeczywiście są postrzegane. W przeciwnym wypadku sąd jest fałszywy.

Ważne przy opisywaniu tego procesu jest, aby wspomnieć o tym, że sąd nie ma jednego obiektu. Relacja, która konstytuuje sąd nie jest relacją pomiędzy dwoma pojęciami, mianowicie umysłem, a twierdzeniem, ale raczej jest to relacja pomiędzy kilkoma określeniami czyli umysłem, a tym co należy nazwać elementami składowymi zdania. Autorzy podają w tym miejscu przykład zdania „*to jest czerwone*". Dla takiego twierdzenia należy mówić o trzech pojęciach: umysłu, *czerwone* i *to*.

W momencie wydania sądu, powstaje pewien kompleks bytów, skomponowany z umysłu i różnorodnych obiektów sądu. Jeśli sąd jest prawdziwy można wskazać takie złożenie obiektów. Fałsz jest równoznaczny z brakiem takiego zespołu obiektów w określonej relacji. Jak można słusznie zauważyć, zarysowana teoria prawdy jest bardzo zbliżona, jeśli nie pokusić się o stwierdzenie o identyczność, do klasycznej teorii prawdy, która została opracowana przez Arystotelesa. Niewielkie zmiany wprowadzone jedynie uwspółcześniają koncepcję przyjmowaną już przez starożytnych myślicieli.

Hierarchia funkcji i zdań Na pierwszy rzut oka hierarchia proponowana w [Russell, 1910-1913] jest bardzo prosta. Funkcje, gdzie dany obiekt a jest argumentem, nie są zdolne do posiadania innych argumentów. Następne w hierarchii są funkcje, gdzie element a może być argumentem. Ponad takimi są funkcje, w których inne funkcje mogą stawać się argumentami.

Pierwsze problemy pojawiają się w momencie, gdy przyjdzie do analizowania funkcji z dwoma różnymi argumentami, przykładowo:

$$\forall\phi \ f(\phi\hat{z} \,.\, x)^{26}.$$

W tym przypadku, jeśli x jest zmienną, badana funkcja jest funkcją x. Natomiast jeśli funkcja zakłada kwantyfikację ogólną dla $\phi\hat{z}$, w tym miejscu nie może to być jedna wartości zakładanych na podstawie reguły błędnego koła.

Wracając do hierarchii, jest to całkowicie oczywiste, że jakiekolwiek funkcje, które nie zawierają zmiennych pozornych, mogą być źródłem funkcji, w których zarejestruje się wystąpienie zmiennych pozornych. Dlatego można usuwać kolejne zmienne pozorne w badanej funkcji poprzez zastępowanie ich zmiennymi rzeczywistymi. Na końcu winna zostać funkcja, która nie będzie zawierać żadnych zmiennych pozornych. Dla dalszych potrzeb, taka zredukowana funkcja zostanie nazwana *macierzą*[27]. Jest jasne, że można wyprowadzić z macierzy danej funkcji zdaniowej wszystkie możliwe zdania, poprzez wprowadzanie kolejnych argumentów pozornych. Ponadto tak utworzona macierz jest pomocna przy ustalaniu możliwych typów.

Podstawowym, najniższym typem zmiennej są *indywidua*. Nie są to ani zdania, ani funkcje. Niemniej konstytuują one zarówno funkcje, jak i zdania. Z punktu widzenia prowadzonej analizy, są one prawdziwymi wartościami, ponieważ nie są redukowalne do niczego innego. Wszystkie funkcje, które nie zawierają zmiennych pozornych, lecz jedynie indywidua, to funkcje *pierwszego rzędu*. Taka funkcja może być również nazwana matrycą pierwszego rzędu, ponieważ można z niej wyprowadzić funkcje zawierające kwantyfikatory ogólne i szczegółowe.

Funkcjami *drugiego rzędu* zostaną nazwane te funkcje, których argumentami są funkcje pierwszego rzędu lub indywidua. Takie funkcje, o ile nie zawierają zmiennych pozornych, są macierzami *drugiego rzędu*. Odpowiednio macierze *trzeciego rzędu* to takie funkcje, które zawierają jako argumenty tylko zmienne niższych rzędów. Należy tutaj podkreślić, że wprowadzanie kwantyfikacji odbywa się jedynie dla argumentów niższego rzędu. Nie jest

---

[26] $(\phi) \,.\, f(\phi\hat{z},\, x)$

[27] ang. matrix

możliwe, dla funkcji drugiego rzędu, aby była zapisana z zmienną pozorną wyższego rzędu, przykładowo trzeciego. Podobna hierarchia, w zależności od rodzaju argumentu, może być wyprowadzona dla zdań.

Aksjomat redukowalności Ostatnim tematem hierarchii funkcji jest rozważenie aksjomatu redukowalności. Aksjomat ten służy do uzasadnienia wnioskowań, w których występują pojęcia związane z kwantyfikacją ogólną, przykładowo takie wyrażenia jak *wszystkie cechy a*. Na początku należy jednak zdefiniować pojęcie równoważności formalnej.

Dwie funkcje są *formalnie równoważne*, kiedy dla każdego możliwego argumentu, który występuje w obu funkcjach, obie funkcje przyjmują taką samą wartość logiczną. Oznacza to, że obie równoważne funkcje są spełniane przez ten sam zestaw argumentów.

Aksjomat redukowalności zakłada, dla danej funkcji $\phi(x)$, istnieje formalnie równoważna funkcja *predykatywna* tj.

$$\exists\psi\ \phi(x) \ \equiv_x \ \psi!(x)^{28}.$$

Przez *predykat* należy rozumieć nazwę jednej z cech danego obiektu.

Aksjomat redukowalności jest równoważny twierdzeniu, że

każda koniunkcja lub alternatywa predykatów jest równoważna pojedynczemu predykatowi.

W ten sposób, w ciągu kilku kroków, można sprowadzić każdą funkcję, która nie zawiera predykatów, do takiej jej równoważnej predykatywnej.

Podobny aksjomat pojawia się w [Mostowski, 1948]. Autor tej pozycji nazywa go *aksjomatem definicyjnym* i zaznacza, że jest to bardzo podobne sformułowanie do *akjomatu redukowalności* w *Principia Mathematica* czy nawet do pewnika o wyróżnianiu w teorii mnogości proponowanej przez E. Zermelo.

Omawiany aksjomat stwierdza, że dla każdej funkcji zdaniowej o co najmniej n zmiennych wolnych istnieje dokładnie jedna relacja n-członowa N, że:

$$\forall x, y, \ldots, u \ \Big(N(x, y, \ldots, u) \ \equiv \ \varphi(x, y, \ldots, u)\Big)$$

3.2. Formuła logiczna

Rozpatrując problem formuły logicznej w filozofii autorów *Principia Mathematica* należy przede wszystkim podkreślić niezwykle poprawne opracowanie zagadnień związanych z szeroko pojętymi podstawami matematyki. Każdy, kto próbował zgłębić dokonania logiki w okresie pierwszej połowy XX wieku, prawdopodobnie dojdzie do wniosku, że dzieło Russella i Whiteheada jest monumentalnym pomnikiem filozofii. Z całą pewnością weszło do kanonu wspaniałych osiągnięć myśli ludzkiej. Dzieje się tak między innymi dlatego, że to kilkutomowe dzieło zostało napisane w czasach, gdy dominującą formą wyrażania opinii logików były artykuły, które jedynie zarysowywały problemat bądź przedstawiały częściowe wyniki badań. Natomiast

[28] $\vdash : (\exists\psi) : \phi x \,.\equiv_x .\, \psi! x$

zadanie, które postawili przed sobą obaj badacze, imponuje wielkością i precyzją przedstawiania.

Niemniej wstępne uwagi, które zostały pokrótce zreferowane w poprzednim podrozdziale, a dotyczące systemu zawarte w pierwszym tomie *Principia Mathematica* wskazują na uproszczenie przy prezentacji podstawowych idei. W porównaniu z badaniami G. Fregego znajdują się one jednak na znacznie wyższym poziomie precyzji. Trzeba podkreślić, że początkowe omówienie notacji i idei dotyczących całego gmachu jest bardzo proste, opiera się na potocznych skojarzeniach i często nie posiada żadnego innego uzasadnienia poza jasnym przekonaniem autorów. Na obronę należy stwierdzić, że część wyjaśnień winna w ten sposób wyglądać, ponieważ dotyczy zakresu definicji projektujących. Wydaje się jednak, że nawet ten typ definicji winien posiadać jakiekolwiek uzasadnienie, chociażby w potocznej praktyce językowej.

Na podstawie opisanego systemu, można przedstawić definicję formuły logicznej w postaci indukcyjnej, co odpowiada pewnemu nastawieniu autorów. Autorzy wielokrotnie wyrażali przekonanie, że logika opiera się na obserwacji działania języka naturalnego. Definicja formuły logicznej brzmi:

Formuła logiczna jest to każde wyrażenie, które jest:

— *formułą zdaniową w postaci pojedynczego znaku symbolizującego zdanie lub w postaci funkcji zdaniowej*
— *połączeniem takich formuł zdaniowych w złożone wyrażenie przy pomocy spójników.*

Kolejne zadanie, jakie należy rozwiązać, przy omawianiu formuły logicznej to algorytm symbolizacji. Sposób zamiany dowolnie złożonego zdania czy wyrażenia języka naturalnego na wyrażenie języka symbolicznego jest znacznie bardziej złożony w stosunku do propozycji G. Fregego. Rozróżnienie pomiędzy zdaniem a wyrażeniemwynika z przeświadczenia autorów, które jest poparte narzuconą symboliką Russella-Whiteheada. Symbolika ta zawiera znak asercji, który służy do wskazywania, czy dane wyrażenie jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane wyrażenie jest stwierdzone, staje się zdaniem. W przeciwnym wypadku, wyrażenie nie posiada określonej wartości logicznej i nadal jest nazywane wyrażeniem.

Pierwszym krokiem, jaki należy wykonać przy próbie translacji dowolnego zdania na język symboliczny, jest wskazanie wszystkich wyrażeń prostych, które występują w tłumaczonym wyrażeniu. Dzieje się tak poprzez wskazanie operatorów łączących dwa zdania proste w złożone. Takimi łącznikami są, przykładowo, operator koniunkcji lub operator implikacji. W tym kroku badacz powinien także określić wzajemne zależności pomiędzy częściami prostymi, precyzyjnie wzajemną zależność polegającą na podrzędności bądź współrzędności wyróżnionych części.

Kolejnym krokiem, jaki badacz winien wykonać, jest wyróżnienie wszystkich kwantyfikatorów, które zostały użyte w tłumaczonym wyrażeniu. W tym celu konieczne jest określenie zakresu każdej zmiennej. Praca ta jest wykonana w dwojakim celu. Pierwszy z nich to wskazanie zmiennych pozornych i rzeczywistych. Drugi cel, stawiany tej czynności, to określenie zasięgu działania kwantyfikatorów, ale także ich ilości.

Trzeci krok w proponowanym algorytmie winien zbadać wyróżnione zdania proste pod kątem wykorzystanych funkcji, nazw czy deskrypcji. Ten krok jest poświęcony na precyzyjne określenie budowy i składników zdań podstawowych. W tym miejscu uważny badacz powinien doprowadzić do sytuacji w której wszystkie zmienne, które występują w wyrażeniu, posiadają wyraźny zakres, określony poprzez odpowiednie kwantyfikatory.

Na samym końcu jako krok czwarty i ostatni, badacz winien dokonać syntezy uzyskanych informacji o tłumaczonym wyrażeniu w jedną spójną formułę, która będzie zawierać wszystkie wyróżnione elementy. Budowa nowopowstającego wyrażenia winna rozpocząć się od poszczególnych wyrażeń prostych, które w odpowiedni sposób będą przeplatane kwantyfikatorami oraz znakami określającymi stosunek pomiędzy składanymi wyrażeniami.

Proponowany algorytm zostanie wykorzystany do przetłumaczenie zdania języka potocznego, podobnie jak w przypadku G. Fregego. Zdanie, po wstępnych działaniach przygotowawczych, brzmi:

Wszystkie malwy są żółte lub wszystkie malwy są czerwone, i malwa Jeremiego nie jest żółta, zatem malwa Jeremiego jest czerwona.

Zgodnie z prezentowanym powyżej sposobem tłumaczenia należy wykonać kolejne kroki:

1. wskazanie zdań prostych – w badanym zdaniu występują cztery zdania proste:
   — *wszystkie malwy są żółte*
   — *wszystkie malwy są czerwone*
   — *malwa Jeremiego nie jest żółta*
   — *malwa Jeremiego jest czerwona*

   Wskazują na to łączniki w postaci liter *lub*, *i* czy *zatem*, które odpowiadają w języku potocznym za operacje, odpowiednio, alternatywy, koniunkcji i implikacji. Dodatkowo pierwsze dwa zdania są ze sobą w stosunku współrzędnym, natomiast ostatnie wynika z pierwszych trzech wyrażeń.
2. wyróżnienie kwantyfikatorów – w badanym zdaniu występuje jedna zmienna związana kwantyfikatorem uniwersalnym. Zmienna ta opisuje *malwy*. Dowodzi tego użycie słowa *wszystkie* przed tym rzeczownikiem. Dla autorów *Principia Mathematica* oznacza to wyróżnienie jednej zmiennej pozornej.
3. analiza zdań prostych – każde zdanie proste zostanie oddzielnie zbadane. Arbitralnie zostaną ustalone oznaczenia funkcji i zmiennych. Będą one analogiczne do wprowadzonych przy formalizacji w systemie G. Fregego.
   — *wszystkie malwy są żółte* — zdanie to składa się z kwantyfikatora uniwersalnego, zmiennej *malwy* i funkcji *są żółte*. W języku symbolicznym zdanie to winno zostać zapisane jako

   $$\forall m\ Z(m)$$

   — *wszystkie malwy są czerwone* — zdanie to jest podobne do już analizowanego. Zmienia się jedynie predykat. Zatem zostanie zapisane jako

   $$\forall m\ C(m)$$

— *malwa Jeremiego nie jest żółta* — zdanie zawiera deskrypcję *malwa Jeremiego* i funkcję *nie jest żółta*. Funkcja będzie zapisana jako negacja znanej już funkcji *są żółte*. Zdanie będzie podobne do wcześniejszych. Zamiast stałej należy wprowadzić deskryptor $(\iota m)\ Jm$, który będzie wskazywał na taki desygnat, który jest dokładnie jedną malwą przynależną do Jeremiego, będącą jego własnością. Deskrypcję można zapisać także w postaci rozszerzonej, co związane jest z zapisaniem wszystkich szczegółowych warunków. Badane zdanie powinno zostać zapisane w postaci

$$\sim Z\ ((\iota m)Jm)$$

— *malwa Jeremiego jest czerwona* — treść tego zdania można oddać podobnie to ostatnio opisane tj. jako funkcję z argumentem deskrypcją określoną. Winno być zamienione na następujące wyrażenie:

$$C\ ((\iota m)Jm)$$

4. synteza — badane zdanie po zakończeniu całej analizy winno być przedstawione jako złożenie wyżej określonych zdań prostych z zachowaniem zachodzących pomiędzy nimi zależności logicznych.

$$\Big(\big(\forall m Z(m)\ \vee \forall m\ C(m)\big) \wedge \sim Z\ ((\iota m)Jm)\Big) \rightarrow C\ \big((\iota m)Jm\big)$$

Badane zdanie uzyska ostateczną formę po sprowadzeniu go do notacji opisywanej i proponowanej w [Russell, 1910-1913]. Zatem winno brzmieć następująco:

$$(m)\ :.Z(m)\ \vee\ C(m)..\ \sim Z\ \big((\iota m)\ Jm\big)\ : \rightarrow :\ C\ \big((\iota m)Jm\big)$$

Tak zanalizowane zdanie jasno pokazuje, że autorzy *Principia Mathematica* znacznie lepiej rozwiązali problem przedmiotów opisywanych deskrypcjami. Wprowadzenie operatora *iota* pozwala na precyzyjniejsze opisywanie świata w porównaniu do innych ówczesnych koncepcji.

Formuła logiczna, podobnie jak u G. Fregego, nie jest określona. W przeciwieństwie do poprzednika, autorzy *Principia Mathematica* poświęcają dużo miejsca zagadnieniom związanym z poprawnością zapisywanych wyrażeń. Podobnie bardzo jasno są wyłożone zasady operacji, które można wykorzystać do łączenia zdań. Cała przedstawiona syntaktyka należy do bardzo intuicyjnych. Taki stan można wytłumaczyć faktem, że wiele rozwiązań i propozycji zostało przyjętych do powszechnie przyjętej kultury logiki, zatem jest częścią procesu dydaktycznego każdego adepta logiki.

Podsumowując, temat formuły logicznej wyrażonej w pracy *Principia Mathematica* jest bardzo zbliżony do obecnie przyjmowanych opisów. Dowodzi to wielkiego wpływu tego dzieła na kolejne pokolenia logików. System prezentowany przez A. N. Whiteheada i B. Russella jest rozbudowaną teorią, która zawiera precyzyjnie, aczkolwiek intuicyjnie, określone zasady tworzenia wyrażeń, łączenia ich w większe formuły. Również proces wynikania, czy lepiej, operacja wnioskowania jest opisana w sposób zadawalający.

Na uwagę zwraca także dogłębne opisanie problemu deskrypcji wraz z określeniem problemu istnienia przedmiotów abstrakcyjnych bądź niemożliwych do istnienia. Warty podkreślenia jest fakt, że dzieło *Principia Mathematica* to potężne dzieło, które zostało jedynie częściowo zreferowane na potrzeby tej pracy.

3.3. Uwagi końcowe

Bertrand Russell napisał wiele wartościowych i naukowych książek. Jednym z jego największych dzieł pozostaje, napisana wspólnie z A. N. Whiteheadem, *Principia Mathematica*. Referowanie i opieranie się jedynie na tej pozycji przy omawianiu filozofii B. Russella może skutkować pewnym uproszczeniem stanowiska tego filozofa. Jednak nawet pobieżna analiza późniejszych i wcześniejszych pism wskazuje, że to potężne dzieło może być traktowane jako dzieło życia obu filozofów, niezależnie od dalszej drogi naukowej.

Przedstawianie poglądów B. Russella na temat ontologii znacznie wykracza poza ramy tej pracy, ponieważ w trakcie swojego długiego życia naukowego filozof ten zmieniał nieznacznie swoje poglądy w tej kwestii. Jest to związane przede wszystkim z tym, że okres działania pokrywa się z czasem wielkich odkryć i wielkich dowodów w logice. Przykładowo, w efekcie opublikowania twierdzenie Gödla o niezupełności wstrzymano prace nad opracowaniem systemu aksjomatycznego logiki.

Dokonania B. Russella silnie wpłynęły na świat logików. Jego niewielkie dzieło opisujące problemy z denotatami, które nie istnieją realnie, wywołało polemikę, która trwała kilkanaście lat. Teoria typów, która w zamierzeniu miała być sposobem uniknięcia antynomii w systemach logicznych, została uproszczona przez L. Chwistka. Natomiast niektórzy filozofowie, przykładowo S. Leśniewski, odrzucili i skrytykowali teorię typów.

Każda polemika, czy każdy artykuł krytyczny powodował, że stan opisany w *Principia Mathematica* ulegał powolnej zmianie. Przykładowo w drugim wydaniu tej pozycji autorzy rezygnują z wyróżniania zmiennych pozornych i zmiennych rzeczywistych. Stąd jasne jest, że referowane poglądy autorów stanowią raczej przybliżenie wyników badań przeprowadzonych oraz opisanych w pierwszej połowie XX wieku. Jak zostanie to podkreślone przy omawianiu filozofii S. Leśniewskiego, potężny prąd krytyki dzieła *Principia Mathematica*, który rozwinął się po I Wojnie Światowej, wpłynął na recepcję tego dzieła i spowodował opracowanie odmiennych systemów logiki. Twórcy tych nowych teorii świadomie pomijali dokonania B. Russella szukając alternatywnych sposobów uniknięcia antynomii lub wręcz tworzyli w opozycji, otwarcie krytykując tych autorów i ich dokonania.

4. Poglądy Stanisława Leśniewskiego

Jako trzeci filozof został wybrany Stanisław Leśniewski. Spośród wybranych filozofów do tej pracy reprezentuje on wkład Polski w rozwój logiki światowej. Przez wiele lat, przed II wojną światową, działał czynnie w świecie naukowym. Jego uczniem był m.in. Alfred Tarski. Współpracował z Kazimierzem Ajdukiewiczem oraz Janem Łukasiewiczem. Należał do członków szkoły lwowsko-warszawskiej. Opublikował co prawda niewiele artykułów, ale do dnia dzisiejszego inspiruje wielu badaczy. Dowodzi tego fakt, że po blisko pięćdziesięciu latach wydano [Leśniewski, 1991]. Pozycja ta jest przekładem na język angielski kluczowych dzieł Stanisława Leśniewskiego.

Badacz ten znany jest także z tego, że zbudował w latach 20-tych alternatywną teorię mnogości. W przeciwieństwie do opisywanego wcześniej G. Cantora, co powtórzył B. Russell, Stanisław Leśniewski zaproponował inne traktowanie zbioru elementów. Zbiór czy też, lepiej, kolekcja nie jest definiowany jako zbiór odmiennych części. Dzieje się tak w klasycznej teorii mnogości. Dla tego filozofa, części składają się na zbiór. Jest to kolektywne rozumienie pojęcia zbioru. Naukę traktującą o właściwościach takiego zbioru została nazwana *mereologią*.

Chronologicznie, nauka o częściach, tak można tłumaczyć słowo *mereologia*, powstała najwcześniej na podstawie polemiki S. Leśniewskiego z opublikowanym wówczas [Russell, 1910-1913]. Dopiero w kolejnych latach na podstawie prowadzonych prac badawczych, nowe pojęcie zbioru, a także zbiór twierdzeń został osadzony na fundamencie logiki opracowanej przez tego badacza. S. Leśniewski zbudował własny system logiki odmienny od dotychczas proponowanych. Podstawę stanowiła *prototetyka* czyli rachunek zdań. Następna w kolejności była *ontologia*, która rozszerzała badania prototetyki o zakres relacji między nazwami. Na samym końcu, jako zwieńczenie dzieła życia, umieszczona była *mereologia*. Systemy Leśniewskiego powstały w celu poszukiwania podstaw matematyki oraz w celu wyeliminowania antynomii z nauk dedukcyjnych. Wielu badaczy uważa, że są wzorem w logice pod względem ścisłości i intuicyjności.

Dla potrzeb tej pracy jako kluczowe zostaną zreferowane prototetyka i ontologia. Stanowią one podstawy systemu opracowanego przez S. Leśniewskiego. Podstawowymi pozycjami dla tego zdania będą [Leśniewski, 1929], która opisuje prototetykę i [Leśniewski, 1930a], przedstawiająca ontologię. Zreferowanie obu rachunków pozwoli na przybliżenie tematu formuły logicznej w systemach Leśniewskiego. Nawiasem mówiąc, ze względu na fakt, że autor ten pisał wiele artykułów w języku niemieckim, a wersje polskie, publikowane przed II wojną światową, nie były wznawiane, praca ta opierać się będzie na przekładach angielskich pochodzących z [Leśniewski, 1991].

Notacja zaproponowana przez S. Leśniewskiego odbiega od dotychczas

opisywanej. Pomimo tego, że w tym przypadku także czytelnik ma do czynienia z zapisem literowym, autor ten przyjął całkowicie odmienny sposób oznaczania podstawowych operacji logicznych. Zamiast akronimów, zostają zaproponowane ideogramy, które jednoznacznie wskazują na daną operację. W tym celu zostaje wybrany kod, który szyfruje kolejne operacje. Ze względów technicznych nie jest możliwe dokładne powtórzenie tej notacji. Niemniej jest możliwe przybliżenie oryginalnego wyglądu formuły logicznej, proponowanej przez S. Leśniewskiego. Dlatego też zostaną przyjęte poniższe symbole dla oznaczenia podstawowych operacji:

$\otimes$ – równoważność,
$\ominus$ – implikacja,
$\ominus$ – koniunkcja,
$\oslash$ – alternatywa,
$\sim$ – negacja.

Zasięg kwantyfikatora uniwersalnego, precyzyjnie oznaczany przez S. Leśniewskiego, będzie wskazywany przez parę nawiasów $\langle\rangle$. Zgodnie z przyjętą na wstępie zasadą, wyrażenia oryginalne będą zapisywane w przypisach. Bezpośrednio w treści niniejszej pracy, formuły będą sprowadzane do współczesnej notacji.

4.1. Język formalny

4.1.1. Prototetyka

Prototetyka została wyłożona w [Leśniewski, 1929]. Tytuł tego dzieła, *Podstawowe założenia nowego systemu podstaw matematyki*[1], jest znamienny. S. Leśniewski przedstawia, po kilkunastu latach pracy badawczej, podsumowanie pierwszego systemu, rachunku nazw. W tym dziele wyjaśnia także przyczyny dla których oddawał się pracy dydaktycznej. Zaproponowana konstrukcja jest już budowlą zamkniętą.

Prace nad *nową teorią typów* rozpoczęły się w 1921 roku. Bezpośrednią przyczyną był fakt, że propozycja Whiteheada–Russella była dla S. Leśniewskiego nieintuitycyjna. Dlatego też filozof ten podjął pracę nad nowym systemem, który korzystałby z *kategorii semantycznych*. Koncepcja ta jest bardzo zbliżona do koncepcji kategorii opracowanej przez Arystotelesa, czy kategorii znaczeniowych przygotowanej przez E. Husserla. Z tej perspektywy autor rozpoczął prace nad przygotowanie podstaw *Prototetyki* i *Ontologii*.

Stanisław Leśniewski wybrał, jako podstawową operację, równoważność. Wybór taki jest uzasadniony wynikami pracy Alfreda Tarskiego, który w 1922 roku stwierdza, że możliwe jest zbudowanie całego systemu logiki na jednym i tylko jednym podstawowym terminie. S. Leśniewski przytacza podstawowe

[1] ang. Fundamentals of a New System of the Foundations of Mathematics, niem. Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik.

definicje innych operatorów, cytując długie partie artykułu Tarskiego. Negacja zostaje zdefiniowana następująco:

$$\forall p \left[\sim p \equiv \Big(p \equiv \forall q\,(q) \Big) \right]^2$$

Kolejno, implikacja może być sprowadzona do następującej definicji:

$$\forall p \forall q \, \Big(p \rightarrow q \Big) \equiv \Big(p \equiv p \wedge q \Big)^3$$

Ostatnim określanym łącznikiem jest alternatywa:

$$\forall p \forall q \, \Big(p \vee q \Big) \equiv \Big(\sim p \rightarrow q \Big)^4$$

Autor, dla pełnej jasności, stwierdza, że dane wyrażenie X jest zdaniem ekwiwalentnym, jeśli spełnione są dwa warunki:
1. X jest zmienną zdaniową lub równoważnością,
2. jeśli dowolne wyrażenie Y, które tworzy poprawną lub niepoprawną część wyrażenia X, jest ekwiwalencją, to prawa lub lewa strona równoważności Y jest albo zmienną zdaniową, albo równoważnością.

Jest to definicja zdania opartego na równoważności. Ten fakt pozwala domniemywać, że autor był precyzyjny w swoich wywodach. W ten prosty sposób S. Leśniewski definiuje formułę logiczną i jej podstawowy warunek.

W [Leśniewski, 1929] autor wykłada i analizuje kilka systemów opartych na ekwiwalencji jako podstawowym operatorze. Wszystkie rachunki rozpoczynają od tego samego punktu, od aksjomatów. Na początku przyjęte są tylko dwa:

A1 $\Big((p \equiv r) \equiv (q \equiv p) \Big) \equiv \Big(r \equiv q \Big)^5$

A2 $\Big(p \equiv (q \equiv r) \Big) \equiv \Big((p \equiv q) \equiv r \Big)^6$

Pierwsza najprostsza wersja prototetyki, nazwana SS, przyjmuje powyższe dwa zdania jako aksjomaty. SS ma tylko dwie zasady otrzymywania nowych zdań tj. zasadę odrywania i zasadę podstawiania. Już ta uboga wersja pozwala na udowodnienie 79 twierdzeń. Stanowią one podstawę do dalszych poszukiwań.

Na podstawie przeprowadzonych badań, celem uporządkowania możliwych zdań, autor wprowadza i ściśle określa pojęcie stopnia ekwiwalencji. Zatem ekwiwalencja X jest stopnia n, jeśli następujące warunki są spełnione:
— X jest równoważnością, w której obie strony, będące zdaniami równoważnymi, zawierają dokładnie n zmiennych,
— jeśli jedna strona równoważności X zawiera pewną zmienną Y, to druga strona zawiera dokładnie tak wiele zmiennych równych Y jak można znaleźć po pierwszej stronie.

---
[2] $[p] :. \sim (p) . \equiv: p \equiv .[q].q$
[3] $[p,q] :. p \supset q . \equiv: p \equiv . p.q$
[4] $[p,q] : p \vee q . \equiv . \sim (p) \supset q$
[5] $p \equiv r . \equiv . q \equiv p :\equiv . r \equiv q$
[6] $p \equiv . q \equiv r \equiv: p \equiv q . \equiv r$

Dzięki temu pojęciu autor stwierdza, że każda ekwiwalencja stopnia pierwszego i drugiego jest możliwa do udowodnienia w SS na podstawie czterech twierdzeń wyprowadzonych z przyjętych aksjomatów. Brzmią one następująco:

T7 $(q \equiv r) \equiv (r \equiv q)$[7]

T19 $r \equiv r$[8]

T20 $(q \equiv r) \equiv (q \equiv r)$[9]

T21 $(r \equiv r) \equiv (r \equiv r)$[10]

Autor dowodzi kilkanastu twierdzeń dotyczące *SS* i możliwości dowodzenia w zależności od stopnia danej ekwiwalencji, przykładowo:
jeśli A jest równoważnością stopnia n (gdzie n jest większe bądź równe 3) i każda ekwiwalencja stopnia niższego jest udowodniona w *SS*, to A daje się udowodnić w *SS*.

Niemniej pragnienie rozwoju prototetyki spowodowało, że S. Leśniewski postawił sobie pytanie: w jaki sposób wzmocnić SS, tak aby otrzymać klasyczny rachunek zdań, do którego dodano tezę i jej ewentualne konsekwencje:

$$\forall p\, \forall q\, \forall f\, \Big(p \equiv q\Big) \to \Big(f(p) \equiv f(q)\Big)^{11}$$

W odpowiedzi na to zadanie, autor skonstruował system *SS1*, który charakteryzuje się następującymi cechami:

— zmienne występujące w SS1 każdej kategorii semantycznej są reprezentowane przez stałe, przykładowo możliwe są zmienne jako funkcje z argumentami, które są zdaniami,

— w porównaniu do systemu proponowanego przez A. Whiteheada i B. Russella, tylko zmienne pozorne pozostały w rozszerzonym systemie SS1.

Wersja SS1 jest oparta na trzech aksjomatach, które należy zapisać następująco:

A1 [12]

$$\forall p \forall q \forall r \left\langle \Big((p \equiv r) \equiv (q \equiv p) \Big) \equiv \Big(r \equiv q \Big) \right\rangle$$

A2 [13]

$$\forall p \forall q \forall r \left\langle \Big(p \equiv (q \equiv r) \Big) \equiv \Big((p \equiv q) \equiv r \Big) \right\rangle$$

---

7 $q \equiv r. \equiv .r \equiv q$

8 $r \equiv r$

9 $q \equiv r. \equiv .q \equiv r$

10 $r \equiv r. \equiv .r \equiv r$

11 $[p. q, f]\ .: p \equiv q\ . \supset: \ f(p). \equiv .f(q)$

12 $\llcorner\, p\, q\, r \,\lrcorner \ulcorner \otimes \Big(\otimes \Big(\otimes(pr) \otimes (qp) \Big) \otimes (rq) \Big) \urcorner$

13 $\llcorner\, p\, q\, r \,\lrcorner \ulcorner \otimes \Big(\otimes \Big(p \otimes (qr) \Big) \otimes \Big(\otimes(pr) r \Big) \Big) \urcorner$

A3 [14]

$$\forall q\forall p\Big\langle \forall f\Big\langle\Big(q\Big(p,p\Big)\equiv\Big(\forall r\big\langle f(r,r)\equiv q(p,p)\big\rangle\Big)$$
$$\equiv\forall r\Big\langle\Big(f(r,r)\equiv g(p\equiv\forall q\langle q\rangle,p)\Big)\Big\rangle\Big)\equiv\forall q\langle g(q,p)\Big\rangle\Big\rangle$$

W systemie S. Leśniewskiego nowe zdania są dołączane do aksjomatów na podstawie sześciu zasad, które w trakcie dalszego doskonalenia będą uzupełniane. Te zasady, oznaczone literami greckimi, to:

α) zasada odrywania

β) zasada podstawiania,

γ) dyrektywa dystrybucji kwantyfikatórów – jeśli jest pewne twierdzenie T, które zawiera uniwersalny kwantyfikator Q i składa się z pewnego zdania równoważnego A, które jest w zasięgu kwantyfikatora Q, a także należy do systemu, to jest możliwe dodatnie nowego twierdzenia zbudowanego na podstawie T, poprzez przeniesienie w ściśle określony sposób niektórych zmiennych występujących pod kwantyfikatorem. Na podstawie tej dyrektywy można, na podstawie aksjomatu **A1**, dołączyć twierdzenie:

$$\forall p\forall q\forall r\Big\langle\Big(\Big(p\equiv r\Big)\equiv\Big(q\equiv p\Big)\Big)\Big\rangle\equiv\forall q\forall r\Big\langle(r\equiv q)\Big\rangle$$ [15]

δ) dyrektywa definicji – definicje, spełniające ściśle określone warunki, winny być przedstawiane w postaci ekwiwalencji z częścią *definiendum* po lewej stronie,

ϵ) zasada dotycząca definicji z kwantyfikatorem – podobnie jak zasada δ, określa sposób definiowania, ale z użyciem kwantyfikatorów,

ζ) dyrektywa kwantyfikatora – razem z pozostałymi zasadami, pozwala na wszystkie ogólnie znane operacje przy użyciu uniwersalnego kwantyfikatora.

Rozważania nad możliwościami tak zbudowanego systemu *SS1* doprowadziły Stanisława Leśniewskiego do zaproponowania systemu *SS2*. Jak sam twierdzi w [Leśniewski, 1929], nowy system, który został zbudowany na fundamentach *SS1*, powstał jako wynik dyskusji z J. Łukasiewiczem, a także namysłu nad porównaniem ewentualnych możliwości dowodzenia twierdzeń zawartych w innych systemach. System *SS2* winien być nazywany słusznie *Prototetyką*. Zostaje w nim dodana nowa dyrektywa η, która zezwala na

---

[14]

$$\llcorner p\,q\lrcorner\ulcorner\otimes\Big(\llcorner f\lrcorner\ulcorner\otimes\Big(g(p,p)$$
$$\otimes\Big(\llcorner r\lrcorner\ulcorner\otimes(f(r,r)g(p,p))\urcorner\llcorner r\lrcorner\ulcorner\otimes(f(r,r)g(\otimes(p,\llcorner q\lrcorner\ulcorner q\urcorner)p))\urcorner\Big)\Big)\urcorner\llcorner q\lrcorner\ulcorner g(q,p)\urcorner\Big)\urcorner$$

[15] $\otimes\Big(\llcorner pqr\lrcorner\ulcorner\otimes(\otimes(pr)\otimes(qp))\urcorner\llcorner qr\lrcorner\ulcorner\otimes(rq)\urcorner\Big)$

dodawanie nowych twierdzeń rozpoczynających się od kwantyfikatora uniwersalnego. System ten jest, wedle uznania autora, jest skończony. Zawiera określoną liczbę możliwych wartości zmiennych dla każdej możliwej kategorii semantycznej, cztery wartości dla zmiennej w obrębie funkcji zdaniowej dla jednego argumentu itd.

Niewielkie zmiany dyrektyw czy też zasad rozwijania systemu, a także ambicja S. Leśniewskiego doprowadziły do zbudowania systemu *SS3*. Ambicja, o której mowa, to pragnienie tego badacza stworzenia uniwersalnej prototetyki. Cecha taka zapewniałaby możliwość przełożenia dowolnego innego systemu na system prototetyki, a także działanie odwrotne. W tym celu autor zaproponował równoważny system *SS2*, którego podstawową operacją byłaby implikacja. Dlatego też zostają ponownie zaprezentowane aksjomaty oparte teraz na wynikaniu, a nie na równoważności. Z punktu widzenia formuły, wprowadzone zostaje nowe oznaczenie. Przykładem niech tu będzie pierwszy z aksjomatów **A1**:

$$\forall p \forall q \Big\langle \Big(p \rightarrow (q \rightarrow p) \Big) \Big\rangle$$ [16]

Podobnie dyrektywy, dzięki którym można dołączać nowe zdania do systemu, również zostają zmienione w taki sposób, że opierają się na implikacji. W ten sposób zasada odrywania α pozwala na dodanie twierdzenia S, jeśli zdanie warunkowe K, gdzie dodawane twierdzenie jest następnikiem, należy do systemu wraz z poprzednikiem implikacji K.

S. Leśniewski rozwija kolejne systemy wyjaśniając niejasności lub udowadniając dodatkowe warunki obarczające dyrektywy. Zasady te przedstawiają najdoskonalszy obraz w systemie *SS5*. Piąta wersja systemu prototetyki jest oparta na trzech przytaczanych wyżej aksjomatach, które stanowią niezmienną podstawę tego systemu. Jako dyrektywy wprowadzone zostają następujące zasady: (α), (β), (γ), ($\delta*$), ($\epsilon*$), ($\eta*$). Zasady oznaczone dodatkowo gwiazdkami zostały rozwinięte w trakcie badań nad wcześniejszymi wersjami *SS*. Autor jest przekonany, jak pisze w [Leśniewski, 1929], że *SS5* jest systemem prototetyki równoważnym wcześniej opracowanemu *SS3*.

Z punktu widzenia niniejszej pracy, nie jest ważne analizowanie różnic pomiędzy przedstawianymi systemami rachunku zdań. Zadanie to należy pozostawić innym, którzy poświęcą temu odpowiedni czas. Dla potrzeb omówienia formuły logicznej precyzyjnie omówiony zostanie system *SS5*. Jak pisze autor, jest on ostateczną wersją *Prototetyki*, jej najdoskonalszą formą. S. Leśniewski dla tego systemu w [Leśniewski, 1929] odchodzi od opisywania dyrektyw w języku potocznym, tak jak to robił dotychczas. Dla potrzeb pracy jednak przeprowadza symbolizację dyrektyw, zgodnie z ówczesną modą użycia symboliki. Ta formalizacja dyrektyw winna być rozumiana jako pewne skróty typograficzne, które zastąpią wyjaśnienia w języku naturalnym.

Podobnie jak wcześniej, *SS5* jest oparty na trzech aksjomatach. Zgodnie

[16] $\llcorner pq \lrcorner \ulcorner \ominus(p \ominus (qp))\urcorner$

z badaniami S. Leśniewskiego i M. Wajsberga, te pewniki można zapisać w równoważnej formie pojedynczego najprostszego aksjomatu, który brzmi[17]:

$$\forall f \forall p \forall q \forall r \forall s \forall t \Big\langle \Big(p \equiv q\Big) \equiv \forall g \Big\langle \Big(f\Big(p, f(p, \forall u\langle u\rangle)\Big) \equiv \Big(\forall u \langle f(q, u)\rangle$$

$$\equiv \Big(g(((r \equiv s) \equiv t) \equiv q) \equiv g(((s \equiv t) \equiv r) \equiv p)\Big)\Big\rangle\Big)\Big\rangle$$

Formalizacja dyrektyw przebiega w oparciu o jasno określone skróty, które są podstawowym alfabetem. Przykładowo S. Leśniewski wprowadza następujące symbole:

$A \in b$ – A jest b

$\sim (a)$ – obiekt, który nie jest a

$a \infty b$ – istnieje tyle obiektów a, co obiektów b

$1ingr(A)$ – pierwsze słowo należące do A

Następnie autor buduje coraz bardziej złożony alfabet w oparciu o pierwsze dwadzieścia dwa skróty. Łączy, niczym kostki, i przedstawia odpowiednie wyjaśnienia przy pomocy 49 zdań, które wyjaśniają terminologię[18]. Dzięki temu może zapisać wszystkie dyrektywy systemu *SS5* w formie pięciu jasno określających zdań, które brzmią następująco:

Jeśli teza A jest ostatnią tezą przynależną do systemu, wyrażenie B może być dodane do systemu jako nowe twierdzenie tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z pięciu warunków jest spełniony:

1. $B \in defp(A)$
2. $[\exists C].C \in thp(A).B \in cnsqrprtqntf(C)$
3. $[\exists C, D].C \in thp(A).D \in thp(A).B \in cnsqeqvl(C, D)$
4. $[\exists C].C \in thp(A).B \in cnsqsbst(A, C)$
5. $B \in extnsnlp(A)$

Poszczególne warunki odpowiadają opisywanym wcześniej dyrektywom. Zasada α jest określona przez warunek *3*. Przypominając, zasada ta pozwala dodać do systemu zdanie S, jeśli należy już do systemu zdanie A, którego jedna strona jest równoznaczna z S, a druga jest równoznaczna z dowolnym innym twierdzeniem będącym częścią systemu. Zasada β jest opisana przez warunek *4*. Zasada ta pozwala na podstawianie zmiennych w zdaniach innymi zmiennymi, które już należą do systemu. Zasady $\delta*$ i $\epsilon*$ są zdefiniowane przez warunek *1*. Obie odnoszą się do formy definicji. Zgodnie z uwagami autora, dyrektywy te precyzyjnie wskazują, że w przypadku definiowania definien-

[17]

$$\llcorner fpqrst \lrcorner \ulcorner \otimes \Big(\otimes(pq)$$

$$\llcorner q \lrcorner \ulcorner \otimes \Big(f(pf(p \llcorner u \lrcorner \ulcorner u \urcorner)) \otimes \Big(\llcorner u \lrcorner \ulcorner f(qu) \urcorner \otimes \big(q(\otimes(\otimes(rs)t)q)g\big)\big(\otimes(\otimes(\otimes(st)r)p)\big)\Big)\Big) \urcorner \Big) \urcorner$$

[18] ang. terminological explanations

dum winno znajdować się po prawej stronie równoważności. Dyrektywa γ, opisana warunkiem *2*, została już opisana w trakcie opisywania systemu *SS1*.

Ostatnia dyrektywa, dyrektywa $\eta*$, została zdefiniowana przez warunek *5*. Wersja uproszczona tej zasady stwierdza, że jest możliwe dodanie do systemu nowej tezy T, która zawiera kwantyfikator ogólny i zmienne funkcje dowolnej kategorii semantycznej, pod warunkiem, że system już zawiera tezy, które mogłyby być otrzymane z zdania T.

S. Leśniewski, na zakończenie pozycji [Leśniewski, 1929], podkreśla kilka znaczących faktów dotyczących *SS5*. Przykładowo wskazuje, że system ten nie zakłada specjalnych form stałych terminów czy zmiennych dowolnej kategorii semantycznej. Tylko te znaki funkcyjne, które dotyczą właściwych sobie argumentów, mogą być postawione przed nawiasami. Możliwy w tym systemie jest tylko uniwersalny kwantyfikator. Te i inne uwagi zawarte w tym artykule wskazują na ważniejsze elementy w prezentowanym systemie *Prototetyki*.

4.1.2. Ontologia

Stanisław Leśniewski wykłada *Ontologię* w [Leśniewski, 1930a], gdzie, opierając się na wynikach wcześniejszych prac, precyzuje założenia i zasady rządzące tym systemem. Na podstawie ontologii i prototetyki, zgodnie z twierdzeniem autora, jest możliwe otrzymanie sformalizowanych podstaw matematyki. System ten jest bardzo podobny do pracy [Russell, 1910-1913].

Ontologia operuje jednym podstawowym funktorem:

$$A\varepsilon a^{19}$$

Term ε jest znakiem funkcji, natomiast A i a to dwie nazwy traktowane jako argumenty. Można tłumaczyć wyrażenie jako łaciński odpowiednik A *est* a.

Na podstawie prac zostało udowodnione w 1920 roku, że ontologia może być oparta tylko na jednym aksjomacie[20]

A0

$$\forall A \forall a \Big\langle \Big(A\varepsilon a \Big) \equiv \Big(\sim \Big(\sim \forall B \Big\langle \sim \Big(B\varepsilon A \Big) \Big\rangle \Big) \\ \wedge \Big(\forall B \forall C \Big\langle \Big((B\varepsilon A) \wedge (C\varepsilon A) \Big) \rightarrow (B\varepsilon C) \Big\rangle \Big) \\ \wedge \Big(\forall B \Big\langle (B\varepsilon A) \rightarrow (B\varepsilon a) \Big\rangle \Big) \Big) \Big\rangle$$

[19] $\varepsilon\{Aa\}$

[20]

$$\llcorner Aa \lrcorner \ulcorner \oslash \Big(\varepsilon\{Aa\} \ominus \Big(\sim \Big(\sim \llcorner B \lrcorner \ulcorner \Big(\sim \varepsilon\{BA\} \Big) \urcorner \Big) \\ \llcorner BC \lrcorner \ulcorner \Big(\oplus \Big(\ominus ((\varepsilon\{BA\})(\varepsilon\{CA\}))\varepsilon\{BC\} \Big) \Big) \urcorner \llcorner B \lrcorner \ulcorner \Big(\oplus (\varepsilon\{BA\}\varepsilon\{Ba\}) \Big) \urcorner \Big) \Big) \Big) \urcorner$$

S. Leśniewski również w ontologii wprowadza typograficzne skróty, aby precyzyjnie określić zasady dodawania tez do systemu. Przedstawia również 54 wyjaśnienia terminologiczne, dzięki którym może określić bardzo precyzyjnie warunki. Zatem na podstawie aksjomatu ontologii, przy założeniu, że teza A jest ostatnią tezą przynależną do systemu, wyrażenie B może być dodane do systemu jako nowe twierdzenie tylko w przypadku, gdy jeden z poniższych siedmiu warunków jest spełniony:

1. $B \in 1defo(A)$
2. $B \in 2defo(A)$
3. $[\exists C].C \in tho(A).B \in cnsqrprtqntf(C)$
4. $[\exists C, D].C \in tho(A).D \in tho(A).B \in cnsqeqvl(C, D)$
5. $[\exists C].C \in tho(A).B \in cnsqsbsto(A, C)$
6. $B \in 1extnsnlo(A)$
7. $B \in 2extnsnlo(A)$

Porównując przedstawiane warunki ontologii z analogicznymi warunkami prototetyki, łatwo można wykazać, że warunki *1* i *3–6* to te same warunki dodawania nowych tez do systemu *SS5*. Natomiast warunki *2* i *7* są określone specjalnie na potrzeby ontologii. Tak jak w przypadku prototetyki, odpowiednie wyjaśnienia terminologiczne warunków ontologii są bardzo precyzyjne i złożone.

Zgodnie z uwagami autora, Ontologia zawiera Prototetykę. Każda teza prototetyki może być otrzymana jako teza ontologii. Oczywiście, niewielkie zmiany przyjętych zasad mogłyby spowodować, że te jeden system nie zawierałby się w drugim. S. Leśniewski wskazuje, że z przyjętego aksjomatu ontologii można wyprowadzić cztery czynniki.

Ciągłe prace tego autora, a także jego studentów doprowadziły do tego, że pod koniec lat dwudziestych do symplifikacji aksjomatu ontologii. S. Leśniewski, opierając się na pracach B. Sobocińskiego i A. Tarskiego, przedstawił w [Leśniewski, 1930a] ostatnią najprostszą wersję aksjomatu, który może być wystarczający na potrzeby systemu i który brzmi:

$$\forall A \forall a \Big\langle \Big(A \varepsilon a \Big) \equiv \sim \Big(\forall B \Big\langle \sim \Big((A \varepsilon B) \wedge (B \varepsilon a) \Big) \Big\rangle \Big) \Big\rangle^{21}$$

Systemy S. Leśniewskiego są opisane bardzo profesjonalnym językiem, któremu należy poświęcić czas, aby móc swobodnie wykorzystać wyniki badań tego filozofa. Istnieją opracowania, które można traktować jako przewodniki po przedstawianych systemach. Jednym z nich jest [Luschei, 1962]. Dla potrzeb tej pracy powyższe wyniki zostaną dodatkowo rozszerzone o problemy poruszone w [Borkowski, 1991]. W ten sposób system ontologii winien być przedstawiony prawidłowo.

Definicje wyrażeń nazwowych mają w ontologii S. Leśniewskiego postać:

$$A \varepsilon N \equiv A \varepsilon A \wedge \phi(A)$$

[21] $\llcorner Aa \lrcorner \ulcorner \odot \Big(\varepsilon\{Aa\} \sim \big(\llcorner B \lrcorner \ulcorner (\odot (\varepsilon \{ABa\} \varepsilon \{Ba\})) \urcorner \big) \Big) \urcorner$

Natomiast funktory nazwotwórcze, takie jak deskryptory – operatory *iota*, są definiowane w następujący sposób:

$$A \varepsilon f(v_1 \dots v_n) \equiv A \varepsilon A \wedge \phi(v_1 \dots v_n)$$

W [Borkowski, 1991] przybliżone zostają powszechnie uznane definicje wprowadzone przez S. Leśniewskiego. Poznanie ich pozwoli na lepsze opisanie formuły logicznej.

— $ex(a) \equiv \exists B \; B\varepsilon a$ — wyrażenie to należy czytać *istnieje przynajmniej jedno a*,

— $sol(a) \equiv \forall B \forall C \; (B\varepsilon a \wedge C\varepsilon a \rightarrow B\varepsilon C)$ — *istnieje co najwyżej jedno a*,

— $A\varepsilon V \equiv \exists a \; A\varepsilon a$ — wyrażenie $A\varepsilon V$ winno być czytane *A jest przedmiotem.*

Ontologia S. Leśniewskiego jest systemem ekstensjonalnym. Oznacza to, że funktory zawarte w prototetyce też są ekstensjonalne. W takim przypadku można za każdy funktor podstawić inny równozakresowy. Powstałe w ten sposób wyrażenie będzie równoważne.

Przedstawione oba systemy są tylko wstępem do teorii zbiorów, która również została opracowana przez S. Leśniewskiego. Mereologia jest trzecim wielkim dokonaniem tego badacza. Jak stwierdza [Asenjo, 1977], mereologia jest *otwartym oknem na świat świeżych i alternatywnych sposobów rozumienia pojęcia zbioru.* Pojmowanie zbioru jako kolekcji, czegoś złożonego z części, w przeciwieństwie do obecnie pojmowanej teorii mnogości, jest interesujące. Warto poświęcić temu zagadnieniu więcej czasu. Jednak dodatkowy czas poświęcony na zrozumienie mereologii nie pogłębi problemu formuły logicznej w filozofii S. Leśniewskiego.

4.1.3. Charakterystyka systemu S. Leśniewskiego

Po wstępnym opisie dwóch podstawowych systemów *prototetyki* i *ontologii*, czyli odpowiednio rachunku zdań i rachunku nazw, kolejnym zadaniem przed naturalnym przejściem do tematu formuły logicznej jest przybliżenie tematu zasad określających możliwości dodawania nowych zdań. Do przedstawienia została wybrana ontologia S. Leśniewskiego, ponieważ jej większą częścią jest prototetyka.

S. Leśniewski jest powszechnie ceniony za swoją precyzję wypowiedzi. Wyrażona jest ona między innymi w tym, że cały dorobek tego autora to przede wszystkim publikacje w czasopismach naukowych, czego dowodzi wydanie zbiorowe [Srzednicki, 1992]. Natomiast przyjęty sposób prezentacji opracowanych systemów jest nietypowy. Otóż autor ten zamiast mozolnego opisu kolejnych warunków czy zasad, ogólnie treści, wprowadza specjalnie krótkie formalne specyfikacje, zwane przez niego *wyjaśnieniami terminologicznymi*[22]. Definiuje w ten sposób kolejne terminy wykorzystywane w systemie, a także jako podsumowanie warunki dołączania kolejnych zdań do już przyjętego zbioru. Ontologia jest opisana poprzez 54 taki *wyjaśnienia terminologiczne*. Prototetyka, jako system podrzędny, jest objaśniona w 48 opisach.

Ta, jak się okaże wkrótce, potężna praca syntetyczna opiera się na kilku podstawowych zwrotach, których rozumienie jest wręcz intuicyjne. Wyraże-

[22] ang. terminological explanation, skrót T.E.

nia te są, podobnie jak *wyjaśnienia terminologiczne*, typograficznymi skrótami pewnych pojęć. W ten sposób, jak opisuje to sam autor, pozostanie więcej miejsca do dyspozycji. Ciekawostką jest, że te definicje są akronimami o podstawie pochodzącej z słów języka angielskiego.

Zanim dojdzie do pierwszych *wyjaśnień terminologicznych* S. Leśniewski wprowadza podstawowe skróty:

$A\varepsilon b$ A jest b,
$Id(A)$ obiekt taki sam jak A,
$\sim(a)$ obiekt, który nie jest a,
$a\infty b$ jest tak wiele obiektów a, jak b,
$a \propto b$ jest mniej obiektów a niż obiektów b,
vrb słowo – wyrażenie „*człowiek*”, „*słowo*”, „≡” czy „(” to przykłady słów.

Natomiast wyrażenia składające się z dwóch lub więcej słów, przykładowo „f(∀ ≡”, to obiekty. Aksjomat A3 w wersji oryginalnej, opublikowanej w artykule [Leśniewski, 1929], składa się z 80 słów,

$expr$ wyrażenie,
$prnt$ nawias rodzaju „{”, „[”, „)”,
$prnt1$ nawias z lewej strony,
$prntsym(A)$ symetryczne nawiasy A,
$cnf(A)$ jest takie samo wyrażenie co A – co oznacza, że oba wyrażenia wyglądają identycznie, są równokształtne,
$A1$ aksjomat A1,
thp teza systemu prototetyki,
tho teza systemu ontologii,
$ingr(A)$ należy do A,
$prcd(A)$ poprzedza A,
$scd(A)$ następuje po A,
$1ingr(A)$ pierwsze słowo, które należy do A,
$2ingr(A)$ drugie słowo, które należy do A,

W kolejnych wyjaśnieniach terminologicznych, których złożoność wzrasta wraz z zwiększającym się numerem wyjaśnienia, powtarzają się podobne wyrażenia. Analiza zasad dołączania nowych zdań do systemu wskazuje, że należy zdefiniować dodatkowy zestaw słów przy pomocy skrótów. Znaczenie tych akronimów, a zatem i wyrażeń do których się odnoszą, jest kluczowe dla zrozumienia tego złożonego systemu logiki. Niektóre słowa są już znane logikom, inne są typowe tylko dla S. Leśniewskiego.

Podstawowe definicje Definicje są zawarte w kolejnych objaśnieniach terminologicznych. Często, ze względu na nowatorskie wykorzystanie lub wręcz tworzenie nowych słów, są nieprzetłumaczalne na język polski. W takich przypadkach są one tłumaczone z zachowaniem maksymalnej jasności przekładu.

1. *term* (*term*, T.E. V) – jest to każda jednostka, która nie służy określaniu kwantyfikacji. Notacja w niniejszej pracy zatem określa termem, w nawiązaniu do S. Leśniewskiego, wszystkie znaki poza ⌜, ⌝, ⌞ czy ⌟[23]

[23] w przypadku tej pracy należałoby wskazać „∀”, „⟨” i „⟩” jako znaki, które nie są termami.

2. *kwantyfikator* (*quantifier*, T.E. VIII) – jest opisany za pomocą pięciu warunków. W efekcie pozwala na zapisanie kwantyfikatora generalnego tj. ⌞ A ⌟, gdzie A to zmienna kwantyfikowana. Autor jest tak precyzyjny, że określa nawet dodatkowo warunek identyczności dla A. Jeśli dwa wyrażenia pomiędzy początkiem a końcem kwantyfikatora są równokształtne, to są tym samym.
3. *korpus* (*subquantifier*, T.E. IX) – oznacza taką część wyrażenia, które nie jest kwantyfikatorem. Jest to część wyrażenia, zdania, która jest korpusem i zawiera funktory czy zmienne kwantyfikowane.
4. *generalizacja* (*generalization*, T.E. X) – generalizacja to takie wyrażenie A, gdzie:
   — dla conajmniej jednego B, pierwsze słowo w A jest w B i B jest kwantyfikatorem,
   — dla conajmniej jednego C, C jest ostatnim słowem w A i C jest korpusem w A,
   — jeśli powyższe warunki zachodzą razem, to A jest złożeniem wyrażeń, które są albo B albo C.
5. *jądro* (*nucleus*, T.E. XIII) – dane wyrażenie A jest jądrem wyrażenia B, wtedy i tylko wtedy, gdy:
   — albo A jest zespołem wyrażeń, które są słowami i są w korpusie wyrażenia B,
   — albo A jest jednostkowym wyrażeniem jak B, ale nie jest generalizacją.
6. *zmienna* (*variable*, T.E. XIV) – wyrażenie A jest zmienną generalizacji C związanej przez B, wtedy i tylko wtedy, gdy poniższe cztery warunki są spełnione:
   — B jest słowem w kwantyfikatorze wyrażenia C,
   — A jest równokształtnym z B i A jest w jądrze C,
   — dla każdego D i E, jeśli D jest słowem w wyrażeniu C i E jest słowem w wyrażeniu D, A jest w D i A jest wyrażeniem równokształtnym do E, to D jest wyrażeniem identycznym z wyrażeniem C.
7. *współzmienna* (*convariable*, T.E. XV) – wyrażenia A jest współzmienną do zmiennej B w generalizacji C, wtedy i tylko wtedy, gdy poniższe trzy warunki są spełnione:
   — dla conajmniej jednego D, A jest zmienną generalizacji C związaną przez D,
   — dla conajmniej jednego D, B jest zmienną generalizacji C związaną przez D,
   — A jest wyrażeniem równokształtnym czyli identycznym z B.
8. *parentema* (*parentheme*, T.E. XVI) – wyrażenie to jest zdefiniowane przy pomocy trzech warunków na podobnej zasadzie jak inne. Rezultatem takiej definicji jest wyrażenie składające się z pary nawiasów i zmiennych ograniczonych przez te nawiasy, przykładowo (ab) lub $A(cd)$. Jest to ważna definicja w systemie S. Leśniewskiego, ponieważ w przyjętej przez niego notacji funktor jest stawiany poza obrębem ograniczonym nawiasem czyli przed parentemą.
9. *bycie podobnym* (*similar*, T.E. XXIII) – parentema A jest podobna do parentemy B wtedy i tylko wtedy, gdy:
   — pierwsze słowo parentemy A jest identyczne z pierwszym słowem B,

— argumenty parentemy A i argumenty parentemy B są równoliczne.

10. *bycie analogicznym* (*analog*, T.E. XXV) – argument A wyrażenia C jest analogiczny do argumentu B wyrażenia D, wtedy i tylko wtedy, gdy:
    — C jest parentemą podobną do parentemy D,
    — A jest argumentem parentemy C,
    — B jest argumentem parentemy D,
    — te argumenty w wyrażeniu C, które poprzedzają argument A są równoliczne argumentom poprzedzającym B w parentemie D.
11. *koimplikacja* (*coimplication*, T.E. XXX i T.E. XXXI) – jest to bardzo ważne pojęcie systemu S. Leśniewskiego. Jest zdefiniowane jako szóste słowo aksjomatu prototetyki. Autor wprowadza nowe słowo dla określenia funktora równoważności, ponieważ traktuje relację ekwiwalencji w kategoriach semantycznych. Ponadto w ten sposób można łatwo określić dwa dodatkowe pojęcia tj.:
    — *koimplikans* (*coimplikans*) – jest to poprzednik w parentemie wyrażenia równoważności,
    — *koimplikat* (*coimplicate*) – jest to następnik w parentemie wyrażenia ekwiwalencji.

Przedstawione definicje nie są jedyne w logice proponowanej przez S. Leśniewskiego. Stanowią natomiast zestaw najważniejszych wyrażeń, które umożliwią dalszy opis dyrektyw w tej logice. Kolejnym krokiem, po ustanowieniu takiego fundamentu, jest prezentacja dyrektyw w formie rozwiniętej, co pozwoli pokazać stopień precyzji i jasności omawianej teorii ontologii.

Praca zamiany i przetłumaczenia skrótów typograficznych S. Leśniewskiego została dokonana w [Luschei, 1962]. Tamże ponownie przybliżono idee związane z postacią tego filozofa. Teoria ontologii składa się z następujących warunków:
jeśli teza A jest ostatnią tezą przynależną do systemu, wyrażenie B może być dodane do systemu jako nowe twierdzenie tylko w przypadku, gdy jeden z poniższych siedmiu warunków jest spełniony:

1. $B \in 1defo(A)$
2. $B \in 2defo(A)$
3. $[\exists C].C \in tho(A).B \in cnsqrprtqntf(C)$
4. $[\exists C, D].C \in tho(A).D \in tho(A).B \in cnsqeqvl(C, D)$
5. $[\exists C].C \in tho(A).B \in cnsqsbsto(A, C)$
6. $B \in 1extnsnlo(A)$
7. $B \in 2extnsnlo(A)$

B ∈ 1defo(A) B jest legalną definicją wynikającą z tezy A tego systemu, jeśli poniższe 18 warunków jest spełnionych:

1. pierwsze słowo jądra B jest nie jest zmienną B odnoszącą się do samej siebie,
2. pierwsze słowo koimplikatu jądra B nie jest zmienną odnoszącą się do samej siebie,
3. pierwsze słowo następnika koimplikatora jądra B nie jest składnikiem wyrażenia B traktowanego jako stała, odnoszącego się do tezy A tego systemu,
4. dla każdego C, jeśli C jest termem w poprzedniku jądra B, wtedy

— albo dla co najmniej jednego D, C jest słowem w wyrażeniu D i D jest uniwersalnym kwantyfikatorem w B,
— albo dla pewnego D i E, D jest w B i C jest zmienną generalizacji D związaną przez E,
— albo C jest argumentem lub funktorem składnika B i odpowiada stałej odnoszącej się do tezy A tego systemu,

5. dla każdego C i D, jeśli C jest słowem w wyrażeniu D, a D jest uniwersalnym kwantyfikatorem w B, wtedy dla pewnych E i F, E jest w B, a F jest zmienną generalizacji E ograniczoną przez słowo C,
6. dla każdego C, D i E, jeśli C jest słowem kwantyfikatora wyrażenia B, D jest argumentem wyrażenia E i E jest parentemą jądra B, wtedy dla co najmniej jednego F, F jest w D i F jest zmienną w generalizacji B związanej przez C,
7. dla każdego C, D i E, jeśli C i D są razem w poprzedniku koimplikatora jądra wyrażenia B i są współzmiennymi generalizacji E, E jest w B, wtedy
   — albo C i D są taką samą jednostką,
   — albo dla pewnych F i G, argumenty lub funktory C i D wyrażenia B są quasihomosemami ich odpowiednich wyrażeń podobnych F i G odnoszących się do tezy A tego systemu,
8. dla każdego C, jeśli C jest generalizacją w wyrażeniu B, ale nie jest identyczne z wyrażeniem B, wtedy dla pewnych D, E, F i G, E jest tezą odnoszącą się do tezy A, F jest w E, G jest w B, D jest homosemem identycznym lub poprzedzającym A i D jest podobne jako argument parentemy F do argumentu C parentemy G,
9. dla każdego C i D, jeśli C jest generalizacją w wyrażeniu B, D jest jądrem w C, wtedy
   — albo D jest słowem,
   — albo dla co najmniej jednego E, D jest funkcją generującą zależną od E i E jest prostą frazą zdaniową identyczną z wyrażeniem A lub poprzedzającą to wyrażenie,
10. dla każdego C, jeśli C jest poprzednikiem w jądrze wyrażenia B, wtedy
    — albo dla co najmniej jednego D, C jest jądrem wyrażenia D i D jest generalizacją w wyrażeniu B,
    — albo dla pewnych D i E, argument lub funktor D wyrażenia B, jest odpowiedni przez analogię do kategorii semantycznej, która generuje D i jej analog E,
11. dla każdego C, jeśli C jest parentemą koimplikansu jądra B, wtedy dla co najmniej jednego D, D jest argumentem wyrażenia C,
12. dla każdego C i D, jeśli C jest parentemą następnika jądra B i D jest argumentem wyrażenia C, wtedy dla co najmniej jednego E, D jest zmienną generalizacji B związanej przez E,
13. dla każdego C i D, jeśli C i D są równokształtnymi termami w koimplikacie jądra wyrażenia B, wtedy C i D są taką samą jednostką,
14. dla każdego C i D, jeśli C i D są podobnymi parentemami i C i D są parentemami następnika koimplikatora jądra wyrażenia B, wtedy C i D są taką samą jednostką,
15. dla każdego C, D i E, jeśli parentema C następnika jądra generalizacji B jest dobrana tak, aby być podobna do parentemy E funkcji zdanio-

wej D odnoszącej się do tezy A tego systemu i C zawiera ostatnie słowo w następniku jądra B, wtedy C jest parentemą podobną do E,

16. dla każdego C, D, E, F i G, jeśli C jest parentemą następnika jądra generalizacji A i jest dobrana tak, aby być podobna do parentemy E funkcji zdaniowej D, poprzedzającej parenthemę F podobną do parenthemy G i C zawiera ostatnie słowo poprzedzające G, a G jest w B, wtedy C jest parentemą podobną do E,
17. dla każdego C, D, E i F, jeśli C jest parentemą następnika jądra wyrażenia B, zawierające ostatnie słowo następnika jądra wyrażenia B i C jest podobne do parentemy E i E jest w D, i D jest tezą odnoszącą się do tezy A tego systemu, wtedy dla pewnego F i G, parentema C następnika jądra generalizacji B, jest dobrana tak, aby być podobna do ostatniej parentemy funkcji zdaniowej F identycznej z wyrażeniem A, lub poprzedzające to wyrażenie,
18. dla każdego C, D, E i F, jeśli C jest parentemą następnika jądra wyrażenia B, C zawiera ostatnie słowo poprzedzające D i jest podobne parenthemy F i D jest parenthemą w B, F jest w E i E jest tezą odnoszącą się do A, wtedy dla pewnego G i H, parenthema C następnika jądra generalizacji B, jest dobrana tak, aby być podobna do ostatniej parenthemy H funkcji zdaniowej G, poprzedzającej parenthemą I, która jest podobna do D.

B ∈ 2defo(A) B jest definicją wynikającą z tezy A tego systemu, jeśli poniższe warunki są spełnione:

1. pierwsze słowo jądra wyrażenia B nie jest zmienną wyrażenia B,
2. pierwsze słowo poprzednika jądra B nie jest zmienną wyrażenia B,
3. pierwsze słowo następnika jądra B nie jest zmienną wyrażenia B,
4. pierwsze słowo predykatu następnika jądra B nie jest zmienną wyrażenia B.
5. pierwsze słowo predykatu następnika jądra B nie jest składnikiem wyrażenia B traktowanym jako stała i odnoszącym się do tezy A tego systemu ontologii,
6. dla każdego C, jeśli C jest termem poprzednika jądra wyrażenia B, wtedy
   — albo dla co najmniej jednego D, C jest słowem w D, a D jest kwantyfikatorem w wyrażeniu B,
   — albo dla pewnych D i E, D jest w B, C jest zmienną generalizacji D związaną przez E,
   — albo C jest argumentem lub funktorem składnika wyrażenia B i jest traktowany jako stała,
7. dla każdego C i D, jeśli C jest słowem w D i D jest kwantyfikatorem w B, wtedy dla pewnych E i F, E jest w B i F jest zmienną generalizacji E związanej przez C,
8. dla każdego C, D i E, jeśli C jest słowem w kwantyfikatorze wyrażenia A i D jest argumentem E, a E jest parentemą jądra wyrażenia B, wtedy dla co najmniej jednego F, F jest w D i jest zmienną generalizacji B związaną przez C,
9. dla każdego C, D i E, jeśli C i D występują w poprzedniku jądra wyrażenia A i są współzmiennymi generalizacji E, a E jest w A, wtedy
   — albo C i D są identyczne.

— albo dla pewnych F i G, argumenty lub funktory C i D składnika A są quasihomosemami ich odpowiednich analogów F i G,

10. dla każdego C, jeśli C jest generalizacją w wyrażeniu A, i nie jest identyczne z A, wtedy dla pewnych D,E,F i G, E jest tezą odnoszącą się do tezy B, F jest w E, G jest w A, D jest homosemem wyrażenia B, i jest podobne jako argument parenthemy F do argumentu C parenthemy G,
11. dla każdego C i D, jeśli C jest w wyrażeniu A, D jest jądrem wyrażenia C, wtedy
    — albo D jest słowem,
    — albo dla co najmniej jednego E, D jest funkcją generującą w związku z E i E jest prostą frazą zdaniową odnoszącą się do B,
12. dla każdego C, jeśli C jest funkcją w poprzedniku jądra wyrażenia A, wtedy
    — albo dla co najmniej jednego D, C jest jądrem wyrażenia D i D jest generalizacją w A,
    — albo dla pewnych D i E, argument lub funktor C składnika wyrażenia A odpowiada przez analogię kategorii semantycznej generującej D i analog E,
13. dla co najmniej jednego C, jeśli podmiot funkcji C jest zmienną generalizacji A związaną z podmiotem następnika jądra wyrażenia A, to C albo jest poprzednikiem jądra A, albo jest koniunkcją poprzedników jądra wyrażenia A,
14. dla każdego C, jeśli C jest parentemą predykatu następnika jądra wyrażenia A, wtedy dla co najmniej jednego D, D jest argumentem C,
15. dla każdego C i D, jeśli C jest parentemą predykatu następnika jądra A, D jest argumentem C, wtedy dla co najmniej jednego E, D jest zmienną generalizacji związanej przez E,
16. dla każdego C i D, jeśli C i D są równokształtnymi wyrażeniami i każde jest termem w następniku jądra A, ale nie jest pierwszym słowem tego następnika, wtedy C i D są identyczne,
17. dla każdego C i D, jeśli C i D są podobnymi parentemami predykatu następnika jądra wyrażenia A, wtedy C i D są identyczne,
18. dla każdego C, D i E, jeśli C jest predykatem następnika jądra generalizacji A jest podobne do parentemy E funkcji nazwowej D i C zawiera ostatnie słowo w predykacie następnika jądra wyrażenia A, wtedy C jest parentemą podobną do E,
19. dla każdego C.D,E,F i G, jeśli parentema C predykatu następnika jądra generalizacji A jest podobna do parentemy E funkcji nazwowej D, która poprzedza parentheme F podobną do parenthemy G odnoszącej się do tezy B i C zawiera ostatnie słowo poprzedzające G, a G jest w A, wtedy C jest parenthemą podobną do E,
20. dla każdego C, D i E, jeśli C jest parentemą predykatu następnika jądra wyrażenia A, zawierającego ostatnie słowo w predykacie następnika jądra wyrażenia A i C jest podobne do parentemy E i E jest w D, a D jest tezą odnoszącą się do tezy A, wtedy dla pewnego F i G, parentema C predykatu następnika jądra generalizacji wyrażenia A jest podobna do ostatniej parenthemy G funkcji zdaniowej F odnoszącej się do tezy A,
21. dla każdego C, D, E i F, jeśli C jest parentemą predykatu następnika

jądra A i zawiera ostatnie słowo następujące po D, C jest podobne do parenthemy F i D jest parenthemą w A, F jest w E, E jest tezą tego systemu ontologii, wtedy dla pewnych G, H i I parentema C predykatu następnika jądra generalizacji A jest podobna do parentemy H funkcji nazwowej G poprzedzającej parenthemę I, która jest podobna do D.

[∃C].C ∈ tho(A).B ∈ cnsqrprtqntf(C) Operacja ta opisana koniunkcją polega na wprowadzaniu zamianie zdania z kwantyfikatorem na zdanie z kwantyfikatorem wewnątrz ekwiwalencji i wprowadzenie takiego nowego zdania do systemu. Pierwsza część koniunkcji dotyczy wymogu, aby C było tezą systemu tj. $C \in tho(A)$ oznacza, że C jest tezą powiązaną z A czyli C jest tezą ontologii, jeśli A jest tezą tego systemu, a C poprzedza zdanie A lub jest z nim identyczne.

Natomiast drugi warunek określa na jakiej podstawie można dołączyć zdanie B poprzez przetworzenie przyjętej tezy C. Proces ten jest nazwany w [Luschei, 1962] *dystrybucją kwantyfikatora dla koimplikacji*. Zdanie B winno spełniać poniższe siedem warunków:

1. jądro koimplikansu jądra wyrażenia B jest wyrażeniem równokształtnym do jądra koimplikansu jądra wyrażenia C,
2. jądro koimplikatu jądra B jest wyrażeniem równokształtnym do koimplikatu jądra C,
3. dla każdego E, jeśli E jest słowem w kwantyfikatorze B, wtedy dla co najmniej jednego D, D jest wyrażeniem równokształtnym do C i jest kwantyfikatorem C,
4. dla każdego I,D,E,F,G i H, niech F jest parentemą jądra wyrażenia B, G - parentemą jądra B, I wyrażenia F jest podobne do D wyrażenia G, E jest w D i jest zmienną generalizacji C związaną przez H, wtedy dla co najmniej jednego J, J jest wyrażeniem równokształtnym do E i słowem wewnątrz kwantyfikatora B lub słowem wewnątrz kwantyfikatora C,
5. dla każdego S, D, E, F i G, niech F jest parentemą jądra wyrażenia B, G – parentemą jądra S, H dla F jest podobne do D wyrażenia G, E jest słowem wewnątrz kwantyfikatora generalizacji D, wtedy dla co najmniej jednego I, I jest wyrażeniem równokształtnym do E i jest kwantyfikatorem generalizacji H,
6. dla każdego S, D, E, F i G niech F jest parentemą jądra B, G – parentemą jądra C, S wyrażenia F jest podobne do D wyrażenia G, E jest słowem kwantyfikatora generalizacji D, wtedy dla co najmniej jednego H, H jest wyrażeniem równokształtnym do E, H jest w D i H jest słowem wewnątrz kwantyfikatora generalizacji D lub dla co najmniej jednego I, jest zmienną generalizacji związaną przez I,
7. dla każdego S, D, E, F, G i H, niech F jest parentemą jądra B, G – parentemą jądra C, S wyrażenia F jest podobne do D wyrażenia G, E jest wyrażeniem równokształtnym do H, E jest kwantyfikatorem generalizacji S, H jest słowem w kwantyfikatorze generalizacji B, wtedy co najmniej jednego I, I jest wyrażeniem równokształtnym do E i I jest kwantyfikatorem generalizacji D.

$[\exists C, D].C \in \mathbf{tho}(A).D \in \mathbf{tho}(A).B \in \mathbf{cnsqeqvl}(C, D)$ S. Leśniewski wprowadza za pomocą koniunkcji trzech wyrażeń wprowadza regułę odrywania do swojego systemu ontologii. Tak jak wcześniej, poprzedniki takiej reguły powinny być tezami systemu. W takim przypadku można dołączyć konsekwencję zdań C i D jako nową tezę B do systemu, jeśli spełnione są warunki:
1. D jest wyrażeniem równokształtnym do koimplikansu wyrażenia C,
2. B jest wyrażeniem równokształtnym do koimplikatu wyrażenia C.

$[\exists C].C \in \mathbf{tho}(A).B \in \mathbf{cnsqsbsto}(A, C)$ Reguła niniejsza ustala warunki dołączania zdania, które jest wynikiem podstawiania pomiędzy dwoma już przyjętymi zdaniami. Zdanie B jest konsekwencją, przy założonej co najmniej jednej zmiennej d, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:
1. jądro wyrażenia B jest złożeniem 1 lub więcej wyrażeń typu d,
2. jest dokładnie tak wiele d jak słów korpusu generalizacji C,
3. dla wszystkich E i F, jeśli E jest d, F jest słowem w korpusie C i jest tak wiele d, które poprzedzają E, jak słów w korpusie wyrażenia C, które poprzedzają F, wtedy dla co najmniej jednego G, F jest zmienną wyrażenia C związanym przez G lub jest wyrażeniem równokształtnym do E,
4. dla każdego E i F, jeśli E jest d, F jest słowem w korpusie C i jest tak wiele d, które poprzedzają E, jak słów w korpusie C, które poprzedzają F, wtedy E jest termem, generalizacją, funkcją lub wyrażeniem równokształtnym do F,
5. dla każdego E, F, G i H, jeśli F i G są oba d, E i H są współzmiennymi C i jest tak wiele d, które poprzedzają F, jak słów w korpusie C, które poprzedzają E i jest dokładnie tyle samo d, które poprzedzają G jak słów w korpusie C, które poprzedzają H, wtedy wyrażenie F jest równokształtne do G,
6. dla każdego E, F, G, H, I, J, K i L, jeśli J jest jądrem C, E jest słowem w uniwersalnym kwantyfikacji uogólnienia J, F jest zmienną wyrażenia C ograniczoną przez K, F jest w J, G i H są oba d, jest dokładnie tyle d, które poprzedzają G jak słów w korpusie wyrażenia C poprzedzających E i jest dokładnie tyle d, które poprzedzają H jak słów w korpusie wyrażenia C, które poprzedzają F, L jest w A, i I jest zmienną generalizacji L związanej przez G, wtedy I nie jest w H,
7. dla każdego E i F, jeśli E jest wyrażeniem równokształtnym do F, E jest w C, F jest słowem w kwantyfikatora generalizacji B, wtedy
   - albo dla co najmniej jednego G, E jest słowem w G i G jest kwantyfikatorem w C,
   - albo dla odpowiednich G i H, G jest w C, E jest zmienną generalizacji G związanej przez H.
8. A jest wyrażeniem,
9. dla każdego E, jeśli E jest termem wyrażenie B, wtedy
   - albo E jest argumentem lub funktorem składnika B i jest stałą, odnoszącą się do tezy A tego systemu,
   - albo dla co najmniej jednego F, E jest słowem w F i F jest kwantyfikatorem w B, albo dla pewnego F i G, F jest w B, E jest zmienną generalizacji F ograniczoną przez G.

10. dla każdego E i F, jeśli F jest słowem w E, i E jest kwantyfikatorem w B, to dla określonego G i H, G jest w B, H jest zmienną generalizacji G związaną przez F,
11. dla każdego E, F i G, jeśli F i G są współzmiennymi generalizacji E i E jest w B, wtedy albo F i G są takimi samymi obiektami albo dla pewnego H i I, argumenty albo funktory F i G składnika B są quasihomosemami ich odpowiedników H i I odnoszących się do tezy A tego systemu,
12. dla każdego E, jeśli E jest generalizacją w B, ale nie jest identyczne z B, wtedy dla określonych F, G, H, I i G jest tezą odnoszącą się do tezy A tego systemu, H jest w G, I jest w B, F jest homosemem wyrażenia B, odnoszącą się do A i jest podobne jako argument parentemy H do argumentu E nawiasu I,
13. dla każdego E i F, jeśli F jest generalizacją w B, E jest jądrem wyrażenia F, wtedy albo E jest słowem albo dla co najmniej jednego G, E jest funkcją tworzącą wobec G i G jest podstawową frazą zdaniową odnoszącą się do tezy B tego systemu,
14. dla każdego E, jeśli E jest funkcją w B, wtedy
    - albo E jest identyczne z B,
    - albo dla co najmniej jednego F, E jest jądrem wyrażenia F i F jest generalizacją w B,
    - albo dla odpowiednich F i G, argument lub funktor E składnika wyrażenia B jest podobny do kategorii semantycznej F i jego analogu G, odnoszących się do tezy A tego systemu.

B ∈ 1extnsnlo(A) B jest twierdzeniem, które powstaje w wyniku zastosowania reguły ekstensjonalności, i następuje po tezie A tego systemu, wtedy i tylko wtedy, gdy następujące dziewięć warunków jest spełnione:
1. dla pewnego C i D, C i D są słowami w kwantyfikatora generalizacji B i C poprzedza D,
2. dla każdego C i D, jeśli C jest słowem w D, D jest kwantyfikatorem w B, wtedy dla pewnego E i F, E jest w B, F jest zmienną generalizacji E związanej przez C i nie jest wyrażeniem równokształtnym do pierwszego słowa w jądrze wyrażenia B,
3. dla co najmniej jednego C, pierwsze słowo w poprzedniku kompleksu wyrażeń, które są słowami i występują w korpusie poprzednika jądra wyrażenia B, jest zmienną generalizacji B odnoszącej się do compleksu wyrażeń, które jest słowem w C i C jest parentemą poprzednika jądra w następniku jądra wyrażenia B,
4. dla co najmniej jednego C, pierwsze słowo w następniku jądra poprzednika jądra B jest zmienną generalizacji B odnoszącej się do kompleksu wyrażeń, które jest słowem w C, C jest parenthemą następnika jądra w następniku jądra wyrażenia B,
5. dla każdego C, jeśli C jest funkcją w B, wtedy
    - albo dla co najmniej jednego D, C jest jądrem D i D jest generalizacją w B,
    - albo dla pewnych D i E, argument lub funktor C składnika wyrażenia B jest podobny do semantycznej kategorii, która generuje D i jej analoga, odnoszących się do tezy A tego systemu,

6. dla każdego C, D, E i F, jeśli E jest parentemą poprzednika jądra w poprzedniku jądra wyrażenie B, F jest parentemą następnika jądra w następniku jądra wyrażenia B i argument C wyrażenia E jest podobny do argumentu D dla F, wtedy C i D są współzmiennymi poprzednika jądra wyrażenia B,
7. dla każdego C, D i E, jeśli C jest w B, D i E są współzmiennymi generalizacji wyrażenia C, wtedy dla pewnych F i G, argumenty lub funktory D i E składników wyrażenia B są quasihomosemami ich odpowiednich analogów F i G,
8. dla każdego C i D, jeśli C i D są współzmiennymi poprzednika jądra B, wtedy dla pewnych E i F, E i F są w B i argument C parentemy E jest podobny do argument D parentemy F,
9. dla każdego C, D i E, jeśli C jest funktorem funkcji D, D jest argumentem E, E jest parentemą jądra w następniku jądra B, wtedy C jest zmienną następnika jądra B związanej przez związek wyrażeń, które jest słowem w kwantyfikatorze następnika jądra wyrażenia B.

B ∈ 2extnsnlo(A)) B jest zdaniem wynikającym z zastosowania reguły ekstensjonalności dla nazw na podstawie tezy A tego systemu wtedy i tylko wtedy, gdy jedenaście warunków jest spełnionych:
1. dla pewnych C i D, C i D są słowami w kwantyfikatorze generalizacji B i C poprzedza D,
2. dla każdego C i D, jeśli C jest słowem w D i D jest kwantyfikatorem w B, wtedy dla pewnego E i F, E jest w B, F jest zmienną generalizacji związaną przez C, F nie jest wyrażeniem równokształtnym do pierwszego słowa w jądrze B,
3. pierwsze słowo poprzednika jądra w poprzedniku jądra B nie jest zmienną generalizacji B,
4. dla co najmniej jednego C, pierwsze słowo predykatu poprzednika jądra w poprzedniku jądra wyrażenia B jest zmienną generalizacji B odnoszącą się do zespołu wyrażeń, które są słowem w C i C jest parentemą poprzednika jądra w poprzedniku jądra wyrażenia B,
5. dla co najmniej jednego C, pierwsze słowo predykatu następnika jądra w poprzedniku jądra wyrażenia B jest zmienną generalizacji B odnoszącą się do zespołu wyrażenia, które są słowem w C i C jest parentemą poprzednika jądra w poprzedniku jądra wyrażenia B,
6. dla każdego C, jeśli C jest funkcją w B, wtedy albo dla co najmniej jednego D, C jest jądrem w D i D jest generalizacją w B, lub dla pewnego D i E, argument lub funktor C składnika B jest podobny do kategorii semantycznej generującej D i analog E,
7. podmiot poprzednika i podmiot następnika odpowiednio jądra poprzednika jądra wyrażenia B są współzmiennymi poprzednika jądra wyrażenia B,
8. dla każdego C, D, E i F, jeśli E jest parentemą predykatu poprzednika jądra w poprzedniku jądra wyrażenia B, F jest parentemą predykatu następnika jądra w poprzedniku jądra wyrażenia B i argument C wyrażenia E jest podobny do argumentu D wyrażenia F, wtedy C i D są współzmiennymi poprzednika jądra B,

9. dla każdego C, D i E, jeśli C jest w B, D i E są współzmiennymi generalizacji C, wtedy dla pewnych F i G, argument lub funktor D i E składnika B są quasihomosemami ich odpowiednich analogów F i G, które odnoszą się do tezy A tego systemu ontologii,
10. dla każdego C i D, jeśli C i D są współzmiennymi poprzednika jądra wyrażenia B, wtedy dla pewnego E i F, E i F są w B, argument C parentemy E jest podobny do argumentu D parentemy F
11. dla każdego C, D i E, jeśli C jest funktorem funkcji D, D jest argumentem E, E jest parentemą jądra w następniku jądra wyrażenia B, to C jest zmienną następnika jądra B związanego przez zespół wyrażenia (co najmniej jedno), które jest słowem w kwantyfikatorze następnika jądra B.

4.2. Formuła logiczna

Stanisław Leśniewski stworzył bardzo precyzyjne systemy logiczne. Ze względu na fakt, że prototetyka jest częścią ontologii, w dalszej części opisywany będzie problem formuły logicznej w ontologii. Autor jasno określa warunki na jakiej można dołączyć dowolne twierdzenie do systemu już przyjętych tez. Zamiast jednej reguły odrywania, badacz ten wskazuje dyrektywy definiowania czy podstawiania. Ontologia jest systemem ekstensjonalnym, co jest pozytywną cechą.

Formuła logiczna w przedstawianej filozofii to wyrażenie składające się z kilku wyrażeń, połączonych równoważnością. Podstawowym operatorem jest operator ekwiwalencji. Głównym kwantyfikatorem, wyróżnionym i traktowanym jako jedyny, jest kwantyfikator uniwersalny. Ontologia może być przetłumaczona na język korzystający z funktorów. Jest możliwe zastąpienie równoważności przez inne operatory, przykładowo negację i implikację, tak jak to udowadniał J. Łukasiewicz. Pewnikiem jest, że aby wyrażenie było prawdziwe, musi być udowodnione na gruncie systemu opartego na czterech aksjomatach i siedmiu dyrektywach określających poprawność dołączania danego wyrażenia.

W ontologii S. Leśniewskiego nie ma żadnego znaku stwierdzania. Bardzo precyzyjnie opisany jest zasięg kwantyfikatora, poprzez wprowadzenie dodatkowych symboli określających zasięg danej zmiennej. Za A. Tarskim, autor uznaje inne funktory oprócz ekwiwalencji. Jednak wskazuje odpowiednie definicje, które pozwalają na zapisanie całego zdania zbudowanego przy pomocy takich operatorów jak koniunkcja tylko jako wyrażenia składającego się z zmiennych i powszechnie znanych operatorów, przykładowo:

$$\begin{array}{ll} \textit{koniunkcja} & \forall r \forall s \ \Big(\big(\forall f \ \ r \equiv \left(f(r) \equiv f(s) \right) \big) \equiv (r \wedge s) \Big) \\ \textit{negacja} & \forall r \ \Big(\big(r \equiv (\forall r \ \ r) \big) \equiv \sim (r) \Big) \\ \textit{alternatywa} & \forall r \forall s \ \Big(\sim (r \equiv s) \equiv (r \vee s) \Big) \\ \textit{implikacja} & \forall r \forall s \ \Big(\big(r \equiv (r \wedge s) \big) \equiv (r \rightarrow s) \Big) \end{array}$$

Również dla logiki S. Leśniewskiego można przedstawić algorytm symbolizacji, podobnie jak było to wykonane dla innych prezentowanych filozofów. Okazuje się, że translacja dowolnego zdania z języka potocznego w język symboli jest bardzo podobna niezależnie od przyjętych założeń czy zbudowanego systemu. Dzieje się tak prawdopodobnie dlatego, że dla każdego możliwego systemu logiki, te same informacje są znaczące dla utworzenia formuły logicznej.

Zamiana dowolnego zdania języka naturalnego, przy znanych ograniczeniach zadanych wcześniej, na język ontologii winna postępować według następujących punktów:

1. wyróżnienie zdań prostych — tak jak przy wcześniejszych przykładach, pierwszym krokiem jest wskazanie zdań prostych, jeśli występują.
2. opisanie kwantyfikatorów — należy rozpoznać rodzaj kwantyfikatora oraz jego zasięg. Zasięg działania jest bardzo ważny w przypadku tych systemów.
3. analiza struktury zdań — biorąc pod uwagę odmienność ontologii, należy wyróżnić nazwy i funktory występujące w każdym z zdań prostych.
4. symbolizacja poszczególnych prostych zdań — należy wykonać zamianę zgodnie z omówionymi zasadami.
5. synteza uzyskanych informacji — ostatnim krokiem, analogicznie jak poprzednio, jest dokonanie połączenia uzyskanych informacji i zbudowanie całego wyrażenia.

Powyższy algorytm zostanie teraz wykorzystany do analizy przykładowego zdania. Zdanie brzmi:

Malwy są albo żółte albo czerwone, a malwa Jeremiego wcale nie jest żółta, zatem musi być czerwona.

Zgodnie z wynikami poprzednich badań, zdanie po przygotowaniu poprzez rozszerzenie brzmieć będzie następująco:

Wszystkie malwy są żółte lub wszystkie malwy są czerwone, i malwa Jeremiego nie jest żółta, zatem malwa Jeremiego jest czerwona.

Zgodnie z prezentowanym powyżej sposobem tłumaczenia należy wykonać kolejne kroki:

1. wyróżnienie zdań prostych - w badanym zdaniu występują cztery zdania proste:
   — *wszystkie malwy są żółte*
   — *wszystkie malwy są czerwone*
   — *malwa Jeremiego nie jest żółta*
   — *malwa Jeremiego jest czerwona*

   Działanie to jest podobne do wykonywanych już przy analizie systemów Fregego czy Whiteheada-Russella.
2. opisanie kwantyfikatorów - w zdaniu występuje jedna zmienna związana kwantyfikatorem uniwersalnym. Zmienna ta opisuje *malwy*. Wynik ten nie różni się od wcześniej uzyskanych. Różnica polega na zasięgu kwantyfikatora. Kwantyfikator generalny dotyczy jedynie dwóch pierwszych zdań. Kolejne są poza jego zasięgiem.

3. analiza struktury zdań – nad każdym zdaniem prostym zostanie przeprowadzona analiza. Biorąc pod uwagę specyfikę ontologii S. Leśniewskiego, wynikiem nie będą funkcje czy zmienne, ale raczej zdania typu $B\varepsilon a$
   — *wszystkie malwy są żółte* — zdanie to zawiera kwantyfikator uniwersalny, nazwę *malwy* i nazwę *żółte*. Obie nazwy są połączone funktorem zdaniotwórczym z dwoma argumentami nazwami. Użycie kwantyfikatora jest pominięte ze względu na fakt, że nie dotyczy tylko tego jednego zdania. Zatem w języku symbolicznym zdanie to winno zostać zapisane jako
   $$\forall M \; M\varepsilon z$$
   — *wszystkie malwy są czerwone* — zdanie to jest podobne do już analizowanego. Zmienia się jedynie predykat. Zatem zostanie zapisane jako
   $$\forall M \; M\varepsilon c$$
   — *malwa Jeremiego nie jest żółta* — Zdanie to zawiera funktor nazwotwórczy od argumentu nazwowego czyli *malwa Jeremiego*. Kolejną nazwą jest nazwa koloru tj. *żółte*. Obie nazwy są połączone przy pomocy funktora ε, który jest zanegowany. Zgodnie z przedstawionym opisem ontologii, funktor nazwotwórczy winien być zapisany następująco:
   $$M\varepsilon f(J)$$
   Konstrukcja ta oznacza dosłownie *malwa, która należy do Jeremiego*. Podsumowując badane zdanie powinno zostać zapisane w postaci
   $$M\varepsilon f(J) \wedge \sim M\varepsilon z$$
   — *malwa Jeremiego jest czerwona* — treść tego zdania można oddać podobnie to ostatnio opisane tj. w postaci koniunkcji prostych wyrażeń. Winno być zamienione na następujące wyrażenie:
   $$M\varepsilon f(J) \wedge M\varepsilon c$$

4. synteza — badane zdanie po zakończeniu całej analizy winno być przedstawione jako złożenie wyżej określonych zdań prostych z zachowaniem zachodzących pomiędzy nimi zależności logicznych. Należy pamiętać o zasięgu kwantyfikatora i innej budowie zdań z deskrypcją.

$$\left(\forall M \left\langle \left(M\varepsilon z \right) \right\rangle \vee \forall M \left\langle \left(M\varepsilon c \right) \right\rangle \wedge \left(M\varepsilon f(J) \wedge \sim M\varepsilon z \right) \right) \rightarrow \left(M\varepsilon f(J) \wedge M\varepsilon c \right)$$

Na uwagę zasługuje fakt, że kwanyfikator ogólny nie dotyczy drugiej części zdania. Teoretycznie powinien tam być umieszczony kwantyfikator egzystencjalny. Nie został jednak dołączony, ponieważ precyzyjniej byłoby dołączyć przesłankę, która pokazuje opuszczenie kwantyfikatora uniwersalnego na rzecz *malwa Jeremiego*.

Zapis w takiej formie jest bardzo prosty i intuicyjny. Jednak, aby być zgodnym z systemem S. Leśniewskiego, badane zdanie można zapisać w postaci przy pomocy samej równoważności. Warto pamiętać, że przeprowadzona symbolizacja nie jest prawidłowa. Zdanie takie powinno być dołączone do systemu na podstawie jednej z dyrektyw dołączania nowych zdań. Zatem należałoby wskazać przyjęte zdanie i wyprowadzić następujące:

$$
\begin{aligned}
&\forall M(\forall s(\forall M(\forall s \\
&\qquad ((\forall M(((\Big(M\varepsilon z\Big) \equiv \Big(M\varepsilon c\Big)) \equiv \forall M(\Big(M\varepsilon z\Big) \equiv \Big(M\varepsilon c\Big)))) \\
&\qquad \equiv (s((\forall M(((\Big(M\varepsilon z\Big) \equiv \Big(M\varepsilon c\Big)) \equiv \forall M(\Big(M\varepsilon z\Big) \equiv \Big(M\varepsilon c\Big)))) \\
&\qquad \equiv s((\forall M(\Big(M\varepsilon f(J) \wedge M\varepsilon c\Big) \equiv (\forall M\Big(M\varepsilon f(J) \wedge M\varepsilon c\Big)))))))) \\
&\qquad \equiv (s((\forall M(\forall f(\forall M(((\Big(M\varepsilon z\Big) \equiv \Big(M\varepsilon c\Big)) \equiv \forall M(\Big(M\varepsilon z\Big) \equiv \Big(M\varepsilon c\Big)))) \\
&\qquad \equiv (s((\forall M(((\Big(M\varepsilon z\Big) \equiv \Big(M\varepsilon c\Big)) \equiv \forall M(\Big(M\varepsilon z\Big) \equiv \Big(M\varepsilon c\Big)))) \\
&\qquad \equiv s((\forall M(\Big(M\varepsilon f(J) \wedge M\varepsilon c\Big) \equiv (\forall M\Big(M\varepsilon f(J) \wedge M\varepsilon c\Big))))))))) \\
&\qquad\qquad\qquad \equiv s(\Big(M\varepsilon f(J) \wedge M\varepsilon c\Big))))
\end{aligned}
$$

Powiększonymi nawiasami zostały zaznaczone zdania podrzędne równoważne wcześniej omawianym. Przeprowadzona zamiana i sprowadzenie badanego zdania do systemu S. Leśniewskiego z tylko jednym funktorem *ekwiwalencji* wskazuje, że zdanie jest bardzo złożone i w ten sposób niezrozumiałe. Ten problem, który pojawia się trudniejszych zdaniach, jest jedną z niewielu wad tego systemu logiki.

4.3. Obserwacje

System logiki, który został zaproponowany przez S. Leśniewskiego, należy do jednego z ciekawszych spośród teorii logicznych zbudowanych w historii filozofii. Jest dobrym przykładem pracy filozofów, którzy później zostali zaliczeni do szkoły lwowsko-warszawskiej. Na uwagę i podziw zasługuje fakt, że systemy te powstały w okresie, gdy większość badaczy aprobowała system Whiteheada-Russella. Wspomina o tym nawet sam Leśniewski w swoich artykułach.

Do niewątpliwych zalet tej teorii należy zaliczyć jej intuicyjność i prostota. To zdanie jest podkreślane przez wielu badaczy. Taka opinia pojawia się także w [Woleński, 1983], gdzie podtrzymana jest także opinia o nowatorstwie prac S. Leśniewskiego. Tamże wskazane jest, że Leśniewski jako jeden z nielicznych celnie skrytykował *Principia Mathematica*.

Koncepcja omawianego systemu jest odmienna od dotychczas przyjmowanych. Zakłada się w niej, że dana formuła nie należy do systemu o ile nie zostanie dołączona na podstawie odpowiedniej dyrektywy. Wszystkie nazwy tj. puste, generalne czy jednostkowe należą w omawianej ontologii do kategorii semantycznej nazw. Ontologia wprowadza wiele nowych definicji, a także wiele nowych przedmiotów, jednak nie należy traktować tego jako zorganizowanej hierarchii. Hierarchia istnieje o tyle, o ile mowa raczej o podrzędności

niektórych funktorów wobec innych. Przykładowo, nazwy są podrzędne wobec funktorów zdaniotwórczych ze względu na bycie argumentem dla tego funktora.

[Luschei, 1962], jako jeden z niewielu, analizuje i przedstawia system opisany przez S. Leśniewskiego. W swojej pozycji udowadnia, że S. Leśniewski rozwinął teorię logiki i gramatykę kategorii semantycznych w takim stopniu, że podobne wyniki otrzymali dopiero N. Goodman i W. V. Quine ćwierć wieku później. Badania te zostały opisane w *Steps towards a constructive nominalism*. Podobnie R. M. Martin i J. H. Woodger przedstawili analogiczne zagadnienia w *Toward an inscriptional semantics* na początku lat pięćdziesiątych.

Konstruowanie takiego systemu mogło się powieść między innymi dlatego, że S. Leśniewski opracował niezwykle rygorystyczne kanony formalizowania teorii logicznych. Dzięki temu jego reguły wprowadzania dotyczą precyzyjnie wprowadzania nowych wyrażeń poprzez wywiedzenie z aksjomatu, na podstawie proponowanej definicji, wnioskowanie poprzez podstawianie czy wykorzystanie jako zmiennych dowolnych kategorii semantycznych. Dyrektywy dołączania nowych wyrażeń do już przyjętego korpusu, pięć dla prototetyki czyli rachunku zdań i siedem dla ontologii czyli rachunku nazw, są uniwersalnie ważne i niezależne od ontologii.

Języki logiki jest całkowicie ekstensjonalny. Ewentualne zmienne nie są wprowadzane na podstawie aksjomatów. Wyrażenia ekwiwalentne mogą być wymienione bez zmiany ich zakresu tj. wartości prawdy. Każde twierdzenie prototetyki lub ontologii jest możliwe do przetłumaczenia w jej równoważnik logiczny, który zawiera tylko stałe związane z ekwiwalencją, czy też, jak to nazywa S. Leśniewski, koimplikacji. Język Leśniewskiego może być nazwany konstruktywnie nominalistycznym. Dzieje się tak dlatego, że nawet twierdzenie, które można by parafrazować jako odnoszące się do pewnych abstraktów, można przetłumaczyć w logiczny ekwiwalent nie zawierający żadnych pozalogicznych stałych oprócz takich, przykładowo nazw, czasowników i funktorów, które opisują indywidualny aspekt rzeczywistości. Dla przykładu w twierdzeniu *nienawiść jest symetryczna*, niektórzy odnosiliby słowo *nienawiść* jako określenie relacji nienawidzenia. Natomiast możliwe jest przetłumaczenie tego zdania w wyrażenie, gdzie dla dwóch dowolnych jednostek, pierwsza nienawidzi drugiej wtedy i tylko wtedy, gdy druga nienawidzi pierwsszej. . Jest to zwykły opis pary indywiduów.

Rzadko jest to wspominane w literaturze, ale S. Leśniewski wykorzystuje w dowodzeniu intuitywną technikę naturalnej dedukcji. Jest to wnioskowanie z niezałożonych przesłanek przy pomocy odpowiednich zasad dołączania nowych zdań do przyjętych. Każda dedukcja przy metodzie Leśniewskiego jest zupełnym zdaniem. warunkowym w formie, zawierającym odniesienie do wszystkiego, co zostało dotychczas udowodnione w tym systemie.

Ontologia S. Leśniewskiego jako jeden z trzech systemów zaproponowanych przez tego autora zasługuje na uwagę. Wydaje się, że jest ciekawą alternatywą i zmianą wobec obowiązującego paradygmatu teorii mnogości, który panuje w logice i matematyce od czasów pierwszej publikacji *Principia Mathematica*.

5. Zakończenie

Niniejsza praca została poświęcona zagadnieniu formuły logicznej w pierwszej połowie XX wieku. W celu zrealizowania tego tematu, zostały wybrane dwa kierunki rozwoju logiki w ówczesnym okresie. Pierwszy z nich był reprezentowany przez G. Fregego, B. Russella i A. N. Whiteheada. Ci twórcy, choć wywodzący się z różnych środowisk i działający w różnych krajach, w bardzo podobny sposób przedstawiali odpowiedź na pytanie, czym jest formuła logiczna. Rezultatem ich pracy jest współczesne uznanie dla ich dokonań i wysoka ocena logiki matematycznej.

Drugi kierunek rozwoju logiki był popularny w okresie międzywojennym. W tej pracy reprezentowany był przez S. Leśniewskiego, polskiego logika, który oparł swój system logiczny na kolektywnej definicji zbioru i kategoriach semantycznych. Niestety działania wojenne zniszczyły wiele już przygotowanych publikacji tego autora. Jednak problemy, które stały przed B. Russellem czy S. Leśniewskim mogą wydawać się banalne w świetle obecnie prowadzonych wykładów. Ale dyskusja dalej trwa, o czym świadczy obecność S. Leśniewskiego w literaturze.

Dla przypomnienia, teza tej pracy brzmiała:

Charakterystyka formuły logicznej w systemie logiki S. Leśniewskiego jest precyzjniejsza niż analogiczna charakterystyka w logice Frege-Russella

Na wstępie zostały zaznaczone trzy obszary względem których jest zorganizowany plan prezentacji. Jeśli wykorzystać tamten podział, to można podsumować oba systemy w trzech ważnych zakresach:

język formalny pod tym kątem logika proponowana przez Russella jest obecnie powszechnie wykładana. Jej głównymi cechami jest wykorzystanie wielu funktorów zdaniotwórczych takich jak alterntaywa i koniunkcja. Pojęcie formuły logicznej nie jest jasne, podobnie jak sposób definiowania. Praktyka pokazuje, że taka logika wypełnia wiele zadań przed nią stawianych. Natomiast system opracowany przez S. Leśniewskiego ma jasno określoną definicję formuły logicznej. Jest bardzo dobrze opracowany sposób dodawania nowych zdań do już przyjętych. S. Leśniewski posługuje się tylko jednym funktorem zdaniotwórczym, który zastępuje wszystkie zwyczajowo przyjęte. Wpływa to pozytywnie na przejrzystość systemu, ale też i negatywnie na długość tłumaczonych tautologii z klasycznego rachunku zdań.

symbolizacja W systemie S. Leśniewskiego każde zdanie dołączane winno być konsekwencją na określonych zasadach zdania przyjętego. Jeśli pominąć ten warunek, to wyjątkowo podobna staje się procedura tłumaczenia dowolnych wyrażeń języka naturalnego na język danego systemu logicznego. W każdym z przypadków, określone znaki określają zdania, nazwy

czy funktory. Zawsze jest określony stosunek pomiędzy kolejnymi dołączanymi elementami. Na tej płaszczyźnie oba kierunki rozwoju są bardzo sobie bliskie.

zobowiązania ontologiczne S. Leśniewski jest uważany za nominalistę. Wskazuje na to chociażby [Luschei, 1962]. Można się o tym fakcie także przekonać analizując kolejne dyrektywy. Kluczowe w nich jest operowanie wyrażeniem i jego zmiana, natomiast nie jest ważne odniesienie do rzeczywistości. Zakłada się, przykładowo w definicji, że coś istnieje, lecz ogranicza się to do prostych cech i relacji. Przeciwnie, Russell i Whitehead wprowadzając teorię typów logicznych uwikłali cały system w szereg zobowiązań ontologicznych. Nawet przy pominięciu tego fragmentu systemu, należy mieć na uwadze, że system ten winien być nazwany realizmem. Zakłada on bowiem wiele odniesień wyrażeń, w tym również abstrakcyjne.

Porównywanie dwóch systemów w tej pracy odbywa się poprzez analizę sposobów opisywanie formuły logicznej i analizowania jej problemów. S. Leśniewski przedstawia definicję w tej materii na wstępie swojej pracy. System Russella-Fregego jest pozbawiony takiego określenia. Sprawa formuły jest zepchnięta na plan dalszy. Próba przedstawienia definicji jest z góry skazana na niepowodzenie, ponieważ proponowanie jakiejkolwiek jest już swego rodzaju nadinterpretacją tej szkoły.

Formuła logiczna jest ściśle podporządkowana notacji. W poprzednich rozdziałach ukazywana była notacja S. Leśniewskiego, podobnie jak dla G. Fregego czy B. Russella. Warto wskazać, że notacja proponowana przez polskiego logika była łatwiejsza do zrozumienia i nauczenia się. Propozycja Russella była też prosta, niemniej problematyczne było określenie zasięgu kwantyfikatorów czy występowanie nawiasów.

W systemie S. Leśniewskiego każdy element był co najmniej raz zdefiniowany. Ten autor rozpoczynał prace nad systemem od wskazania ogólnie przyjętych wyrażeń, które później rozbudowywał i uszczegóławiał. Przypomina to tworzenie domu od fundamentów. Na takich jasno określonych wyrażeniach, przykładowo kwantyfikatora czy generalizacji, S. Leśniewski opracowuje dyrektywy, pięć dla prototetyki, siedem dla ontologii, które bardzo precyzyjnie regulują sposoby definiowania nowych wyrażeń, jak i ogólnie dołączania ich do już przyjętych twierdzeń systemu.

Zupełnie przeciwnie jest zbudowany system Russella-Fregego. Wydaje się, że w tej logice ważniejsza jest elegancja wywodzonych twierdzeń niż precyzja wykonywania przedstawiania dowodów. Wskazuje na to między innymi fakt, że istotne jest dodawanie nowych zdań do już przyjętego zbioru czy budowanie podstaw matematyki. Natomiast problem podstaw, definicji czy formuły, zostaje pominięty lub jedynie krótko streszczony na marginesie innych zagadnień.

Biorąc pod uwagę powyższe podsumowanie, a także uwagi zamieszczone w niniejszej pracy, należy uznać tezę *Charakterystyka formuły logicznej w systemie logiki S. Leśniewskiego jest precyzyjniejsza niż analogiczna charakterystyka w logice Frege-Russella* za udowodnioną. Jeśli powyższa teza jest udowodniona, może warto postawić pytanie dlaczego po siedemdziesięciu latach system Russella jest lepiej znany i ceniony niż konkurencyjny system S. Leśniewskiego? Czy popularność filozofa powoduje, że jest możliwe pominięcie

innego, opracowanego systemu logiki? Czy system przygotowany przez nieznanego szerokiemu światu badacza może być, tylko powodu działania poza ścisłym centrum myśli naukowej, zlekceważony? Wreszcie, jak zmieniłaby się nauka, gdyby system S. Leśniewskiego został był spopularyzowany? Te pytania, tematycznie należące do filozofii, kończą niniejszą pracę.

Bibliografia

[Ajdukiewicz, 1949] K. Ajdukiewicz, *Zagadnienia i kierunki filozofii*, Kraków, 1949.

[Arystoteles, 2003a] Arystoteles, *Kategorie*, w: K. Leśniak , red., *Dzieła Wszystkie*, Warszawa, 2003a.

[Arystoteles, 2003b] Arystoteles, *Analityki pierwsze*, w: K. Leśniak , red., *Dzieła Wszystkie*, Warszawa, 2003b.

[Arystoteles, 2003c] Arystoteles, *Analityki wtóre*, w: K. Leśniak , red., *Dzieła Wszystkie*, Warszawa, 2003c.

[Arystoteles, 2003d] Arystoteles, *Hermeneutyka*, w: K. Leśniak , red., *Dzieła Wszystkie*, Warszawa, 2003d.

[Asenjo, 1977] F. G. Asenjo, *Leśniewski's Work and Nonclassical Set Theories*, *Studia Logica*, 36 (4), 1977.

[Batóg, 2000] T. Batóg, *Dwa paradygmaty matematyki*, Poznań, 2000.

[Batóg, 1994] T. Batóg, *Podstawy logiki*, Poznań, 1994.

[Borkowski, 1991] L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin, 1991.

[Cresswell, 1977] M. J. Cresswell, *Categorial Languages*, *Studia Logica*, 36 (4), 1977.

[Frege, 1904] G. Frege, *Co to jest funkcja?*, w: B. Wolniewicz , red., *Pisma Semantyczne*, ss. 88–100, Kraków, 1977 - tłum., 1904.

[Frege, 1918] G. Frege, *Myśl. Studium logiczne*, w: B. Wolniewicz , red., *Pisma Semantyczne*, ss. 101–129, Kraków, 1977 - tłum., 1918.

[Frege, 1879] G. Frege, *Begriffschrift a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*, w: J. van Heijenoort , red., *From Frege to Goedel*, Cambridge, 1967 - tłum., 1879.

[Frege, 1884] G. Frege, *The Foundations of Arithmetic. A Logico–mathematical enquiry into the concept of number*, Oxford, 1953 - tłum., 1884.

[Frege, 1891] G. Frege, *Funkcja i pojęcie*, w: B. Wolniewicz , red., *Pisma Semantyczne*, ss. 19–44, Kraków, 1977 - tłum., 1891.

[Frege, 1892a] G. Frege, *Pojęcie i przedmiot*, w: B. Wolniewicz , red., *Pisma Semantyczne*, ss. 44–59, Kraków, 1977 - tłum., 1892a.

[Frege, 1892b] G. Frege, *Sens i znaczenie*, w: B. Wolniewicz , red., *Pisma Semantyczne*, ss. 60–88, Kraków, 1977 - tłum., 1892b.

[Hiż, 1977] H. Hiż, *Descriptions in Russell's Theory and in Ontology*, *Studia Logica*, 36 (4), 1977.

[Ishimoto, 1977] A. Ishimoto, *A Propositional Fragment of Leśniewski's Ontology*, *Studia Logica*, 36 (4), 1977.

[Korcik, 1948] A. Korcik, *Gottlob Frege jako twórca pierwszego systemu aksjomatycznego współczesnej logiki zdań*, *Roczniki Filozoficzne*, ss. 138–164, 1948.

[Krajewski, 2005] W. Krajewski, *Współczesna filozofia naukowa*, Warszawa, 2005.

[Lejewski, 1967] C. Lejewski, *Problem of Ontological Commitment*, w: *Fragmenty filozoficzne. Seria trzecia. Księga pamiątkowa ku czci profesora Tadeusza Kotarbińskiego w osiemdziesiątą rocznicę urodzin*, Warszawa, 1967.

[Leśniewski, 1916] S. Leśniewski, *Foundations of a General Theory of Sets*, w: J. Srzednicki, S. Surma, i D. Barnett , red., *Collected Works*, ss. 129–173, Warszawa, 1992 – tłum., 1916.

[Leśniewski, 1927] S. Leśniewski, *On the Foundations of Mathematics*, w: J. Srzednicki, S. Surma, i D. Barnett , red., *Collected Works*, ss. 174–382, Warszawa, 1992 – tłum., 1927.

[Leśniewski, 1929] S. Leśniewski, *Fundamentals of a New System of the Foundations of Mathematics*, w: J. Srzednicki, S. Surma, i D. Barnett , red., *Collected Works*, ss. 410–605, Warszawa, 1992 – tłum., 1929.

[Leśniewski, 1930a] S. Leśniewski, *On the Foundations of Ontology*, w: J. Srzednicki, S. Surma, i D. Barnett , red., *Collected Works*, ss. 606–628, Warszawa, 1992 – tłum., 1930a.

[Leśniewski, 1930b] S. Leśniewski, *On Definitions in the So-Called Theory of Deduction*, w: J. Srzednicki, S. Surma, i D. Barnett , red., *Collected Works*, ss. 629–648, Warszawa, 1992 – tłum., 1930b.

[Leśniewski, 1991] S. Leśniewski, *Collected Works*, London, 1991.

[Lorenz, 1977] K. Lorenz, *On the Relation Between the Partition of a Whole into Parts and the Attribution of Properties to an Object*, *Studia Logica*, 36 (4), 1977.

[Luschei, 1962] E. C. Luschei, *The logical systems of Lesniewski*, Amsterdam, 1962.

[Marciszewski, 1987] W. Marciszewski , red., *Logika Formalna. Zarys encyklopedyczny*, Warszawa, 1987.

[Misiuna, 1991] K. Misiuna, *Ontologiczne założenia języka*, Warszawa, 1991.

[Mostowski, 1948] A. Mostowski, *Logika matematyczna*, Monografie matematyczne, Warszawa-Wrocław, 1948.

[Omyła, 2001] M. Omyła, *Wyrażalność tez ontologicznych w języku logiki niefregowskiej*, *Edukacja Filozoficzna*, 31, 2001.

[Omyła, 1986] M. Omyła, *Zarys logiki niefregowskiej*, Warszawa, 1986.

[Perelman, 1937] C. Perelman, *Metafizyka Fregego*, *Kwartalnik Filozoficzny*, XIV (II):119–137, 1937.

[Rasiowa, 1968] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki*, Warszawa, 1968.

[Russell, 1919] B. Russell, *Wstęp do filozofii matematyki*, Warszawa, 1958 – tłum., 1919.

[Russell, 1910-1913] B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge, 1960 – tłum., 1910-1913.

[Srzednicki, 1992] J. Srzednicki, *Collected works. Stanislaw Lesniewski.*, Dordrecht, 1992.

[Stonert, 1959] H. Stonert, *Definicje w naukach dedukcyjnych*, Łódź, 1959.

[Stonert, 1964] H. Stonert, *Język i nauka*, Warszawa, 1964.

[Stuchliński, 2000] J. Stuchliński, *Systemy dedukcyjne Leśniewskiego - podstawy filozofii i matematyki*, *Filozofia Nauki*, 3-4 (31-32), 2000.

[Suszko, 1998] R. Suszko, *Wybór pism*, Warszawa, 1998.

[Wittgenstein, 2006] L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Warszawa, 2006.

[Woleński, 1983] J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Kraków, 1983.

[Wolniewicz, 1966] B. Wolniewicz, *Wittgenstein i jego Traktat*, *Kultura i społeczeństwo*, 1, 1966.

Indeks